Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Franca Franchi

## Un teorema di unicità per le equazioni di Boussinesq modificate in base all'equazione di Cattaneo-Fox

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **64** (1978), n.3, p. 273–279.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_3_273_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1978.

**Fisica matematica.** — *Un teorema di unicità per le equazioni di Boussinesq modificate in base all'equazione di Cattaneo–Fox.* Nota di FRANCA FRANCHI (*), presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — We establish a uniqueness theorem for the heat propagation by natural convection governed by the Boussinesq equations, when we replace Fourier's law by Cattaneo–Fox' constitutive equation in bounded domains.

1. In due precedenti lavori [1] e [2], ho dimostrato alcuni Teoremi di unicità per la propagazione di calore per convezione forzata, qualora si sostituisca la legge di Fourier con un'equazione costitutiva, che ho chiamato di Cattaneo–Fox, perché generalizza quella proposta dal Cattaneo più di trent'anni fa.

In questa Nota, continuando ad ammettere la citata equazione costitutiva, intendo stabilire un teorema di unicità per la propagazione del calore per convezione naturale governata dalle equazioni di Boussinesq.

Consideriamo anzitutto un dominio D fisso, limitato da una superficie regolare $\Sigma$ e occupato da un fluido viscoso omogeneo; indichiamo con P un generico punto di D e con $t$ un istante di un opportuno intervallo di tempo $[0, t']$ con $t' > 0$ e del resto qualsiasi:

Siano poi $\boldsymbol{v}(\mathrm{P}, t)$ (1), $p(\mathrm{P}, t)$, $\mathrm{T}(\mathrm{P}, t) - \mathrm{T}_0$, $\boldsymbol{q}(\mathrm{P}, t)$ rispettivamente la velocità, la pressione, l'eccesso di temperatura rispetto ad una temperatura di riferimento $\mathrm{T}_0$, fissata opportunamente, e il vettore flusso di calore.

Com'è noto, le equazioni di Boussinesq (2) per la convezione naturale, indipendenti dalla legge di Fourier, sono:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\nabla \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + (1 - \alpha(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0))\, \boldsymbol{g} - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \tag{1.2}$$

dove $\nu$, costante positiva, rappresenta il coefficiente cinematico di viscosità, $\boldsymbol{g}$ = accelerazione di gravità, $\nabla \boldsymbol{v}$ è il tensore di componenti cartesiane $v_{i/j}$,

(*) Borsista del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1978.

(1) In seguito per semplicità e ove non dia luogo ad equivoco, scriveremo $\boldsymbol{v}$, $p$, T, $\boldsymbol{q}$.

(2) Cfr. [3] Cap. 34; vedi anche [4] eq. (6) e (7) p. 61 e [5] eq. (41) e (43) pp. 16–18; si osservi che Boussinesq ([3]) si limita a considerare fluidi perfetti; mentre gli Autori [4] e [5] esaminano proprio il caso dei fluidi viscosi.

infine $\alpha$ e $\rho_0$ denotano rispettivamente il coefficiente di dilatazione e la densità corrispondente al valore $T_0$ della temperatura e indipendente dalle variazioni di pressione, costanti entrambi e positiva la seconda.

Inoltre, dal bilancio dell'energia, termica, potendosi trascurare gli effetti della dissipazione viscosa (cfr. [5]), si ha:

$$c\rho_0\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}+\nabla \mathrm{T}\cdot \boldsymbol{v}\right)=-\nabla\cdot \boldsymbol{q}+\rho_0\, s \tag{1.3}$$

in cui $c > 0$ è il calore specifico a pressione costante ed $s$ è il supply di calore (per esempio assorbito dal fluido e fornito per radiazione dal mondo esterno).

Infine associamo l'equazione di Cattaneo–Fox.

$$\tau\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}+(\nabla \boldsymbol{q})\,\boldsymbol{v}-\tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{q}\right)=-\boldsymbol{q}-\chi\nabla \mathrm{T} \tag{1.4}$$

dove $\chi > 0$ è la conduttività termica che possiamo ritenere costante, e $\tau$ rappresenta una costante positiva della dimensione di un tempo.

Alle (1.1)–(1.4) uniremo opportune condizioni iniziali e alla frontiera; più precisamente, assumeremo note per $t = 0$ e per ogni P in D la velocità, la temperatura e il vettore flusso di calore mentre, come condizioni alla frontiera, per ogni $t \in (0, t')$ e $\mathrm{P} \in \Sigma$ supporremo assegnate, come ipotesi *a*), la velocità del fluido assieme alla sua temperatura e solo sulla parte $\Sigma_1$ di $\Sigma$ dove entra il fluido, il vettore flusso di calore, oppure, come ipotesi *b*), riterremo assegnate la velocità e la componente normale del vettore flusso di calore $\boldsymbol{q}$ su $\Sigma$ e $\boldsymbol{q}$ e la temperatura su $\Sigma_1$; in particolare, se sulla frontiera il fluido ha velocità nulla, il che per esempio accade quando il dominio è limitato da pareti solide, è sufficiente assegnare su $\Sigma$ o la temperatura oppure la componente normale del vettore flusso di calore.

In questo lavoro, si vuole provare il seguente teorema di unicità: le equazioni (1.1)–(1.4) corredate dalle condizioni iniziali e alla frontiera su esposte, s'intende note le sorgenti e a meno di una funzione solo del tempo per la pressione, ammettono nella classe delle funzioni regolari per il tipo di problema descritto (cioè $\boldsymbol{v}, p, \mathrm{T}, \boldsymbol{q}$ limitate e continue in $\mathrm{D}_{t'} = \overline{\mathrm{D}}\times[0, t']$ assieme alle loro derivate prime e nell'ipotesi che $\boldsymbol{v}$ ammetta derivate seconde spaziali generalmente continue in $\mathrm{D}\times(0, t')$), al più una soluzione.

Il predetto teorema continua a valere nel caso trattato nella [2], cioè per un dominio variabile D $(t)$, però occupato sempre dalle stesse particelle del fluido.

In questo caso, le condizioni iniziali da imporre rimangono le stesse del precedente, mentre sulla frontiera $\Sigma(t)$ di D $(t)$, basta assegnare la velocità (per i fluidi perfetti solo la componente normale della velocità) e la temperatura.

È bene prima di proseguire osservare che le equazioni di Boussinesq sono state ottenute con certe approssimazioni, cioè trascurando termini che bisognerebbe poter confrontare con quelli che si aggiungono passando dalla legge di Fourier a quella di Cattaneo–Fox; questa ricerca, si presenta però ardua, intanto perché non è sempre facile valutare quantitativamente i termini trascurati da Boussinesq, inoltre perché non si conosce esattamente il valore di certi parametri che compaiono nell'equazione di Cattaneo–Fox. Comunque, anche da un punto di vista fisico, non mi sembra inutile studiare le equazioni di questa Nota, in quanto possono essere sufficienti a descrivere come si modificano i fenomeni della convenzione naturale qualora la velocità di propagazione è finita, come risulta dall'equazione di Cattaneo.

2. Per dimostrare il teorema enunciato, supponiamo che esistano due soluzioni « regolari » nel senso precisato al n. 1, del sistema formato dalle equazioni (1.1)–(1.4) con le associate condizioni iniziali e alla fontiera: siano queste $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1$, $T + T_1$, $p + p_1$, $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_1$ e $\boldsymbol{v}_1$, $T_1$, $p_1$, $\boldsymbol{q}_1$.

Poiché entrambe le soluzioni soddisfano le equazioni citate, per sottrazione si ha:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\nabla \boldsymbol{v}_1)\, \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})\, (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} - \alpha T \boldsymbol{g} \tag{2.2}$$

$$c\rho_0 \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla T_1 \cdot \boldsymbol{v} + \nabla T \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) \right) = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \tau \Big( \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} &+ (\nabla \boldsymbol{q}_1)\, \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{q})\, (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) - \\ &- \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) \times \boldsymbol{q} - \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{q}_1 \Big) = -\boldsymbol{q} - \chi \nabla T \,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ora moltiplichiamo scalarmente per $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{q}$ rispettivamente le (2.2), (2.4) e per T la (2.3); dopo semplici trasformazioni, si ottiene:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} v^2 &+ (\nabla \boldsymbol{v}_1)\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})\, (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) \cdot \boldsymbol{v} = \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p \cdot \boldsymbol{v} - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} - \alpha T \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$c\rho_0 \left( \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} T^2 + T \nabla T_1 \cdot \boldsymbol{v} + T \nabla T \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) \right) = -T \nabla \cdot \boldsymbol{q} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \tau \Big( \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} q^2 &+ (\nabla \boldsymbol{q}_1)\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{q} + (\nabla \boldsymbol{q})\, (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) \cdot \boldsymbol{q} - \\ &- \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q} \Big) = -q^2 - \chi \nabla T \cdot \boldsymbol{q} \,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Notiamo intanto che, in base a ben note identità vettoriali e ricordando anche le (2.1) e (1.1) in cui, in luogo di $\boldsymbol{v}$ si ponga $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1$, valgono queste formule:

$$
(2.8) \qquad
\begin{aligned}
&(\nabla \boldsymbol{v})\,(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1)\cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1)\cdot(\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}\,(3)}\,\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1)\cdot \nabla \frac{v^2}{2} = \\
&= \nabla \cdot \left(\frac{v^2}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1)\right) ; \ \mathrm{rot\,rot}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \nabla\cdot(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}) + (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})^2 ; \\
&\nabla p\cdot\boldsymbol{v} = \nabla\cdot(p\boldsymbol{v}) ; \ \mathrm{T}\nabla\mathrm{T}\cdot(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) = \nabla\frac{\mathrm{T}^2}{2}\cdot(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) = \nabla\cdot\left(\frac{\mathrm{T}^2}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1)\right) ; \\
&\mathrm{T}\nabla\cdot\boldsymbol{q} = \nabla\cdot(\mathrm{T}\boldsymbol{q}) - \nabla\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{q} ; \ (\nabla\boldsymbol{q})\,(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{q} = \nabla\cdot\left(\frac{q^2}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1)\right) .
\end{aligned}
$$

Introdotto il simbolo O[4], per la supposta limitatezza di $\nabla\boldsymbol{v}_1$, $\nabla\boldsymbol{q}_1$ e $\nabla\mathrm{T}_1$, tenendo anche presente la diseguaglianza di Cauchy, seguono subito le seguenti maggiorazioni in termini di O:

$$
(2.9) \qquad
\begin{aligned}
&(\nabla\boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \mathrm{O}(v^2) \quad ; \quad |\alpha\mathrm{T}\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}| = |\alpha\boldsymbol{g}|\left(\frac{\mathrm{T}^2 + v^2}{2}\right) = \\
&= \mathrm{O}(\mathrm{T}^2) + \mathrm{O}(v^2) ; \ \mathrm{T}(\nabla\mathrm{T}_1)\cdot\boldsymbol{v} = \mathrm{O}(\mathrm{T}^2) + \mathrm{O}(v^2) ; \\
&(\nabla\boldsymbol{q}_1)\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{q} = \mathrm{O}(v^2) + \mathrm{O}(q^2) .
\end{aligned}
$$

Allora, sostituendo le (2.8) sulle (2.5), (2.6) e (2.7), inserendovi le stime (2.9), e sommando quindi membro a membro le equazioni così ottenute, dopo aver moltiplicato la (2.6) per $\chi$, si ricava, come si può facilmente verificare, l'equazione:

$$
(2.10) \qquad
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(v^2 + c\rho_0\chi\mathrm{T}^2 + \tau q^2) + \nabla\cdot\left(\frac{v^2}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) + \frac{1}{\rho_0}p\boldsymbol{v} + \right. \\
&\left. + \nu\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} + c\rho_0\chi\frac{\mathrm{T}^2}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) + \chi\mathrm{T}\boldsymbol{q} + \frac{\tau q^2}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1)\right) = \\
&= -\nu(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})^2 + \frac{\tau}{2}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q} + \mathrm{O}(v^2) + \mathrm{O}(\mathrm{T}^2) + \mathrm{O}(q^2) .
\end{aligned}
$$

Si osservi intanto che, detto $m$ un valore maggiorante per $|\boldsymbol{q}_1|$, indicato con $\varepsilon$ un numero positivo che fisseremo in seguito, per i primi due termini posti al

(3) Con $(\nabla\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}$ s'intende il trasposto del tensore $\nabla\boldsymbol{v}$.

(4) Diremo che una funzione $f(\mathrm{P}, t) \in \mathrm{C}(\mathrm{D}_{t'})$ è $\mathrm{O}(a(\mathrm{P}, t))$, essendo $a(\mathrm{P}, t) \in \mathrm{C}(\mathrm{D}_{t'})$ e positiva, se esiste una costante M, $\mathrm{M} > 0$, tale che:

$$|f(\mathrm{P}, t)| < \mathrm{M}\,a(\mathrm{P}, t) .$$

Ricordiamo poi che la somma di due funzioni O $(a)$ è O $(a)$ e che il prodotto di una funzione limitata, in particolare di una costante positiva, per una di tipo O $(a)$, rimane O $(a)$; per altre proprietà del simbolo O, del resto ben note, rimandiamo per esempio a [1].

secondo membro di (2.10), possiamo scrivere la seguente stima:

$$(2.11) \qquad -\nu\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})^2 + \frac{\tau}{2}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q} \leq -\nu\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})^2 +$$

$$+ m\,\frac{\tau}{2}\,|\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}|\,|\,\boldsymbol{q}\,| \leq -\nu\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})^2 + m\,\frac{\tau}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})^2 + \frac{q^2}{2\varepsilon}\right) =$$

$$= \left(-\nu + m\,\frac{\tau\varepsilon}{4}\right)(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})^2 + \frac{m\tau}{4\,\varepsilon}\,q^2\,.$$

Scelto poi $\varepsilon$ in $\left(0\,,\dfrac{4\,\nu}{m\tau}\right)$, il primo termine all'ultimo membro di (2.11) è negativo e quindi il primo membro di (2.11) è maggiorato da un termine del tipo $\mathrm{O}\,(q^2)$.

Dopo questa osservazione, se andiamo a sostituire ai primi due termini al secondo membro di (2.10) un termine $\mathrm{O}\,(q^2)$, contribuiamo senz'altro alla maggiorazione del secondo membro.

Integriamo la (2.10), cosi modificata, sul dominio fisso D e applichiamo il teorema della divergenza.

Ricordando il significato del simbolo O, tenendo anche presente che $\mathrm{O}\,(\mathrm{T}^2) = \mathrm{O}\,(c\rho_0\,\chi\mathrm{T}^2)$ e $\mathrm{O}\,(q^2) = \mathrm{O}\,(\tau q^2)$, si perviene, con qualche passaggio, alla seguente diseguaglianza:

$$(2.12) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathrm{D}} (v^2 + c\rho_0\,\chi\mathrm{T}^2 + \tau q^2)\,\mathrm{dD} \leq 2\,\mathrm{N}\int_{\mathrm{D}} (v^2 + c\rho_0\,\chi\mathrm{T}^2 + \tau q^2)\,\mathrm{dD} -$$

$$-\int_{\Sigma}\Big[v^2\,(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1) + \frac{2}{\rho_0}\,p\boldsymbol{v} + 2\,\nu\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} + c\rho_0\,\chi\mathrm{T}^2\,(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1) +$$

$$+ 2\,\chi\mathrm{T}\boldsymbol{q} + \tau q^2\,(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_1)\Big]\cdot\boldsymbol{n}^{(5)}\,\mathrm{d}\Sigma\,.$$

Ma, essendo assegnata la velocità sull'intera $\Sigma$, segue che $\boldsymbol{v} = 0$ su $\Sigma$, sicché risultano nulli i primi tre termini dell'integrale superficiale che compare in (2.12).

Nell'ipotesi *a*), anche T è nulla su $\Sigma$ e quindi altri due termini dell'integrale esteso a $\Sigma$ sono nulli; per quanto riguarda l'ultimo termine, esso è nullo sulla parte $\Sigma_1$, dove entra il fluido, poiché su $\Sigma_1$ $\boldsymbol{q} = 0$, mentre sulla parte rimanente di $\Sigma$, essendo $\boldsymbol{v}_1\cdot n \geq 0$ risulta positivo o nullo; ne concludiamo che l'integrale superficiale è positivo o nullo, quindi, tenendo presente che in (2.12) è preceduto dal segno meno, sopprimendolo si rafforza la maggiorazione.

Nell'ipotesi *b*), sono invece nulli tutti i termini che compaiono nell'integrale superficiale, esclusi il quarto e il sesto, nulli solo su $\Sigma_1$; sicché, ragio-

(5) La normale $\boldsymbol{n}$ si pensa orientata verso l'esterno di $\Sigma$.

nando come sopra si ritrova che integrale è positivo o nullo e quindi, a causa del segno meno che lo precede, togliendolo si contribuisce ad una ulteriore maggiorazione del secondo membro.

Da ultimo, notiamo che se la velocità si suppone nulla su $\Sigma$ ($\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 = 0$) e nell'ipotesi siano note la temperatura oppure la componente normale del vettore flusso di calore su $\Sigma$ (per cui o $T = 0$ oppure $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = 0$), l'integrale superficiale è nullo.

In ogni caso, se le condizioni alla frontiera sono quelle date al n. 1, la diseguaglianza (2.12) è valida senza l'integrale esteso a $\Sigma$; allora, integrandola da 0 a $t$, tenendo presente che in base alle condizioni iniziali è $\boldsymbol{v} = T = \boldsymbol{q} = 0$, $\forall P \in D$, $t = 0$, applicando poi il lemma di Gronwall, con i soliti ragionamenti, segue subito $\boldsymbol{v} = T = \boldsymbol{q} = 0$, $\forall P \in D$, $\forall t \in [0, t']$,

Introdotto questo risultato nella (1.2), ricaviamo che $\nabla p = 0$ e perciò $p = p(t)$.

Il teorema di unicità è pertanto dimostrato.

3. Passiamo ora a dimostrare il teorema, nel caso di un dominio variabile $D(t)$.

A questo scopo, conviene considerare $v^2, T^2, q^2$ come funzioni della particella che inizialmente stava in $P_0 \in D(0)$ e all'istante $t$ generico è giunta nel punto $P \in D(t)$, nel moto con velocità $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1$.

Si ha dunque:

$$\frac{d}{dt}\frac{v^2}{2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{v^2}{2} + \nabla\frac{v^2}{2}\cdot(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1) \,. \tag{3.1}$$

Sostituendo (3.1) in (2.5) e le formule analoghe a (3.1) per $T^2$ e $q^2$ in (2.6) e (2.7), procedendo come al numero precedente, perveniamo alla diseguaglianza:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{c\rho_0\chi}{2}T^2 + \frac{\tau}{2}q^2\right) + \nabla\cdot\left(\frac{p}{\rho_0}\boldsymbol{v} + \nu \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} + \chi T\boldsymbol{q}\right) \leq \tag{3.2}$$
$$\leq O(v^2) + O(T^2) + O(q^2) \,.$$

Integriamo sul dominio $D(t)$ la (3.2) e applichiamo il teorema della divergenza, osservando poi che, per le condizioni alla frontiera, l'integrale superficiale si annulla; d'altra parte, per una ben nota formula [6] e per la (2.1), è possibile scambiare il simbolo di derivata totale con quello di integrale.

Si ritrova in questo modo la (2.12) senza l'integrale superficiale, perciò con lo stesso ragionamento riportato al numero precedente, è provato pure il secondo teorema enunciato al n. 1.

(6) Vedere per esempio [6] form. (4.1), pp. 131–132.

## BIBLIOGRAFIA

[1] F. FRANCHI (1977) - *Sulla propagazione del calore con velocità finita*, « Atti Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, *52*, 212–219.
[2] F. FRANCHI (1976–1977) - *Un teorema di unicità per l'equazione di propagazione del calore con velocità finita*, « Atti Accad. Sci. Torino », *111*, 273–277.
[3] J. BOUSSINESQ (1903) - *Théorie analytique de la chaleur*. Gauthier Villars Paris, vol. II, cap. 34.
[4] D. D. JOSEPH (1965) - *On the stability of the Boussinesq equations*, « Arch. Rational. Mech. Anal. », *20*, 59–71.
[5] S. CHANDRASEKHAR (1961) - *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. International Series of manographs on Physics. Oxford Clarendon Press, 16–18.
[6] J. SERRIN - *Mathematical Principles of classic fluid mechanics*, « Handbuch der Physik », *8* (1), 131–133.