Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Andrea Fort

Gruppi finiti debolmente supersolubili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.3, p. 270–272.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_3_270_0>

Teoria dei gruppi. — *Gruppi finiti debolmente supersolubili* (*). Nota di ANDREA FORT, presentata (**) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — We study the finite groups whose lattice of subgroups has the property that all their proper filters satisfy the Jordan-Dedekind chain condition. It is proved that these groups are solvable and they are classified.

In questa Nota viene studiata la classe dei gruppi finiti G soddisfacenti alla seguente condizione:

(☆) Ogni filtro (1) proprio del reticolo L (G) dei sottogruppi di G soddisfa alla condizione di Jordan–Dedekind (2).

Tale classe contiene quella dei gruppi finiti debolmente modulari, cioè dei gruppi nel cui reticolo dei sottogruppi sono modulari tutti i filtri propri, classe che è stata studiata in [1]. Il gruppo diedrale di ordine 16 fornisce un esempio di gruppo soddisfacente alla condizione (☆) ma non debolmente modulare; tuttavia proveremo che nell'ambito dei gruppi finiti non supersolubili un gruppo soddisfacente alla condizione (☆) è debolmente modulare.

Per comodità chiameremo debolmente supersolubile un gruppo soddisfacente alla condizione (☆).

Rivolgiamo dapprima l'attenzione ai gruppi risolubili non supersolubili ma debolmente supersolubili per ottenere una loro caratterizzazione che ci servirà nel seguito ad escludere l'esistenza di gruppi finiti debolmente supersolubili non risolubili.

TEOREMA A. *Un gruppo finito* G *risolubile e non supersolubile è debolmente supersolubile se e solo se è prodotto semidiretto di due gruppi* P *e* K *e sono soddisfatte le seguenti condizioni*:

a) P *è sottogruppo normale minimo e non ciclico di* G;

b) K *è ciclico ed il suo ordine è dispari e divide* $|P| - 1$;

c) *ogni elemento non identico di* K *opera, per coniugazione, in modo irribudicile su* P.

Dimostrazione. Sufficienza. È una conseguenza immediata del fatto che un gruppo soddisfacente alle condizioni indicate nell'enunciato, per il Teorema 4.1 di [1], è debolmente modulare.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1978.

(1) Ricordiamo che filtro di un reticolo L è un suo sottoreticolo H tale che $x \vee h \in H$ se $x \in L$ e $h \in H$.

(2) Un reticolo finito soddisfa alla condizione di Jordan-Dedekind se e solo se tutte le sue catene massimali hanno la stessa lunghezza.

Necessità. Le argomentazioni usate nella dimostrazione del Teorema 4.1 di [1] che utilizzano la ipotesi che tutte le immagini epimorfe proprie di G sono supersolubili si possono applicare anche in questo caso per concludere che G è prodotto semidiretto del suo sottogruppo normale minimo non ciclico P e del sottogruppo di ordine dispari K ogni cui elemento non identico opera, per coniugazione, in modo irriducibile su P. Rimane pertanto da provare che K è ciclico e che $|K| \mid |P| - 1$. Sia dunque r un divisore primo di $|K|$; allora esiste $x \in K$ tale che $|\langle x \rangle| = r$. $P\langle x \rangle$ è debolmente supersolubile ed allora, se $|P| = p^n$, con p primo, per quanto appena osservato e per Satz II.3.10 di [2] risulta $r \mid p^n - 1$ e $r \nmid p^m - 1$ se $0 < m < n$. Dimostriamo che $(r, n) = 1$. Infatti se fosse $n = rs$, si avrebbe $p^n - 1 = (p^r)^s - 1 = (p^r - 1) \cdot (p^{r(s-1)} + \cdots + p^r + 1) \equiv (p - 1)(p^{s-1} + \cdots + p + 1) \equiv p^s - 1 \mod r$ e quindi $r \mid p^s - 1$ con $0 < s < n$ in contrasto con la minimalità di n. Pertanto $(n, |K|) = 1$ ed allora per Hilfsatz VI.8.1. di [2] si conclude che K è ciclico di ordine divisore di $p^n - 1$.

Al fine di provare che i gruppi debolmente supersolubili sono risolubili, se si tiene conto del fatto che sottogruppi ed immagini epimorfe di tali gruppi sono ancora debolmente supersolubili, basta verificare che non sono debolmente supersolubili i gruppi semplici minimali:

$PSL(2, p)$	$p \neq 2, 3$	$p^2 - 1 \equiv 0$	mod 5	p primo
$PSL(2, 3^r)$	r primo dispari			
$PSL(2, 2^q)$	q primo			
$PSL(3, 3)$				
$Sz(2^q)$	q primo dispari.			

Osserviamo anzitutto che in un gruppo di Suzuki $Sz(2^q)$, con q primo dispari, esiste un sottogruppo massimale non supersolubile che in base a Satz 4.14 di [3] è risolubile e non soddisfa alle condizioni del Teorema A: pertanto $Sz(2^q)$ non è debolmente supersolubile.

Osserviamo ancora che in $PSL(3, 3)$ lo stabilizzatore di un punto del piano sul quale esso opera è un gruppo risolubile di ordine $2^4 3^3$ dotato di una immagine epimorfa isomorfa a $GL(2, 3)$ che non è supersolubile (cfr. Satz II.7.4 di [2]); pertanto anche $PSL(3, 3)$ non è debolmente supersolubile.

Consideriamo ora $PSL(2, p)$, p primo $p \neq 2, 3$. Se $p^2 - 1 \equiv 0 \mod 16$ allora $PSL(2, p)$ contiene un sottogruppo isomorfo al gruppo simmetrico su 4 oggetti (cfr. Hauptsatz II.8.27 di [2]) che non è debolmente supersolubile per il Teorema A, e pertanto, in questo caso, $PSL(2, p)$ non è debolmente supersolubile. Se $p^2 - 1 \not\equiv 0 \mod 16$, allora $PSL(2, p)$ contiene come sottogruppo massimale un sottogruppo H isomorfo al gruppo alterno su 4 oggetti e quindi, se C è un sottogruppo di ordine 3 incluso in H, la catena $\langle 1 \rangle < C < H < PSL(2, p)$ è massimale di lunghezza 3. D'altra parte C è contenuto in un 3–sottogruppo di Sylow che a sua volta è contenuto in un sottogruppo ciclico Z di ordine $(p - 1)/2$ oppure $(p + 1)/2$ allora se $(p - 1)/2 > 3$, cioè se $p > 7$, la catena $\langle 1 \rangle < C < Z \leq N(Z) < PSL(2, p)$ si può raffinare ad una massimale di lunghezza maggiore di 3. Il caso $p = 7$ è già stato considerato in precedenza essendo $7^2 - 1 \equiv 0 \bmod 16$. Se $p = 5$ risulta che $PSL(2, 5)$ è isomorfo al gruppo alterno su 5 oggetti (cfr. Satz II.6.14 di [2]) e questo non è debolmente supersolubile come si può verificare considerando nel suo reticolo il filtro principale generato da un sottogruppo di ordine 2 che normalizza un ciclo di lunghezza 5.

Per verificare che $PSL(2, 3^q)$ non è debolmente supersolubile basta osservare che, se esso non contiene un sottogruppo isomorfo al gruppo simmetrico su 4 oggetti, allora contiene un sottogruppo C di ordine 3 contenuto in un sottogruppo massimale isomorfo al gruppo alterno su 4 oggetti. Però, un 3-sottogruppo di Sylow S di $PSL(2, 3^q)$ ha ordine 3^q e, se q è primo dispari, allora la catena $\langle 1 \rangle < C < S < PSL(2, 3^q)$ si può raffinare fino ad ottenere una catena massimale di lunghezza almeno 4.

Consideriamo infine $PSL(2, 2^n)$. Il suo ordine è $(2^n - 1)\, 2^n (2^n + 1)$ e tutti i divisori primi di $2^n - 1$ oppure di $2^n + 1$ sono maggiori di 3; pertanto se $n > 3$, $2^n - 1$ oppure $2^n + 1$ è prodotto di al più $n - 2$ fattori primi: infatti se $n \geq 4$ si ha $5^{n-2} > 2^n + 1$ giacché $5^2 > 17$ e, per induzione, $5^{(n+1)-2} = 5 \cdot 5^{n-2} > 5(2^n + 1) > 4(2^n + 1) = 2^{n+2} + 4 > 2^{n+1} + 1$, e per $n = 3$ risulta $|PSL(2, 8)| = 7.8.9$. Inoltre $PSL(2, 2^n)$ contiene un sottogruppo massimale che è diedrale di ordine $2(2^n + 1)$ ed uno massimale diedrale di ordine $2(2^n - 1)$: quindi, in ogni caso, contiene un sottogruppo T di ordine 2 connesso con $PSL(2, 2^n)$ mediante una catena non raffinabile di lunghezza al più $n - 1$. D'altra parte, se S indica un 2-sottogruppo di Sylow di $PSL(2, 2^n)$ contenente T, allora la catena $T < S < PSL(2, 2^n)$ si può raffinare in modo da ottenere una catena di lunghezza almeno n. Pertanto $PSL(2, 2^n)$ non è debolmente supersolubile per $n \geq 3$. Essendo $PSL(2, 4)$ isomorfo al gruppo alterno su 5 oggetti, l'analisi dei gruppi semplici minimali è completa e possiamo enunciare il

TEOREMA B. *Ogni gruppo finito debolmente supersolubile è risolubile.*

In base ai risultati ottenuti possiamo enunciare anche il

TEOREMA C. *Un gruppo finito non supersolubile è debolmente modulare se e solo se è debolmente supersolubile.*

BIBLIOGRAFIA

[1] A. FORT (1975) - *Gruppi finiti debolmente modulari*, «Rend. Sem. Mat. Padova», *53*, 269-291.

[2] B. HUPPERT (1967) - *Endliche Gruppen* I. Springer, Berlin.

[3] H. LÜNEBURG (1965) - *Die Suzukigruppen und ihre Geometrien*. Springer, «Lecture Notes», *10*, Berlin.