
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

BRUNELLA BRUNO, MAURIZIO EMALDI

**Sui gruppi nei quali sono normali sensitivi tutti i
sottogruppi**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 64 (1978), n.3, p. 265–269.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_3_265_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Teoria dei gruppi. — *Sui gruppi nei quali sono normali sensitivi tutti i sottogruppi.* Nota di BRUNELLA BRUNO e MAURIZIO EMALDI (*), presentata (**) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — We consider groups whose subgroups are all normal-sensitive. We prove that these groups are separated and that their second derived group is a periodic group with all elements odd order. We give criteria for solvability of such groups and we prove that among these groups those which are solvable are exactly the solvable groups in which normality is a transitive relation.

Seguendo una terminologia introdotta recentemente da S. Bauman [2], un sottogruppo H di un gruppo G è detto normale sensitivo se e solo se da $K \triangleleft H$ segue che $K = H \cap N$ per qualche $N \triangleleft G$; sottogruppi con tale proprietà furono del resto già in precedenza considerati da B. H. Neumann in [4] con il nome di E-sottogruppi. Un gruppo in cui ogni sottogruppo è normale sensitivo sarà nel seguito detto B-gruppo, mentre un B-gruppo risolubile sarà detto un SB-gruppo. Nella presente Nota si dà un teorema generale di struttura dei B-gruppi, provando che in un B-gruppo G l'insieme degli elementi periodici forma un sottogruppo e il derivato secondo di G è un gruppo periodico con gli elementi tutti di periodo dispari. Si dimostra, generalizzando ai gruppi infiniti un risultato di Bauman, che la classe degli SB-gruppi coincide con quella degli $\overline{ST}$ -gruppi ⁽¹⁾, classe quest'ultima descritta da D. Robinson in [5]. Infine si assegnano delle condizioni sufficienti perchè un B-gruppo sia risolubile.¹

1. Osserviamo subito che la classe dei B-gruppi è inclusa in quella dei $\overline{T}$ -gruppi; infatti se G è un B-gruppo ed $L \triangleleft K \triangleleft H \leq G$, allora esiste un $N \triangleleft G$ tale che $L = K \cap N = K \cap (H \cap N) \triangleleft H$. È poi facile vedere che i sottogruppi ed i gruppi fattoriali di un B-gruppo sono tutti B-gruppi. Siano G un gruppo, $K \leq H \leq G$ e K^G la chiusura normale di K in G . Allora $K^G = K[K, G]$, dove $[K, G]$ è il sottogruppo commutatore mutuo di K e G e, per l'identità modulare di Dedekind, risulta $K^G \cap H = K([K, G] \cap H)$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi matematici di ricerca del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1978.

(1) Ricordiamo che dicesi $\overline{T}$ -gruppo un gruppo G in cui da $K \triangleleft H \triangleleft G$ segue $K \triangleleft G$, dicesi $\overline{T}$ -gruppo un gruppo G in cui da $L \triangleleft K \triangleleft H \leq G$ segue $L \triangleleft H$, mentre $\overline{ST}$ -gruppo è un $\overline{T}$ -gruppo risolubile.

Perciò $K^G \cap H = K$ se e solo se $[K, G] \cap H \leq K$. Si perviene pertanto al seguente

LEMMA 1.1. *Siano G un gruppo ed H un sottogruppo di G . Condizione necessaria e sufficiente affinché H sia normale sensitivo è che da $K \triangleleft H$ segua $[K, G] \cap H \leq K$.*

PROPOSIZIONE 1.2. *Un gruppo è un B-gruppo (risp. SB-gruppo) se e solo se ha un sistema locale di B-gruppi (risp. SB-gruppi).*

Dimostrazione. Chiaramente un B-gruppo (risp. SB-gruppo) ha un sistema locale di B-gruppi (risp. SB-gruppi). Inversamente, sia W un sistema locale di B-gruppi (risp. SB-gruppi) del gruppo G e sia $K \triangleleft H \leq G$. Sia h un elemento qualunque di $[K, G] \cap H$. Allora $h = [k_1, g_1]^{e_1} [k_2, g_2]^{e_2} \dots [k_t, g_t]^{e_t}$ dove k_i è in K , g_i è in G , $e_i = \pm 1$. Esiste in W un gruppo F tale che $\langle K_1, K_2, \dots, k_t, g_1, g_2, \dots, g_t \rangle \leq F$. Posto $K_1 = K \cap F$, $H_1 = H \cap F$, abbiamo $K_1 \triangleleft H_1 \leq F$ e perciò $[K_1, F] \cap H_1 \leq K_1$ poichè F è un B-gruppo e vale 1.1. Allora $[K, G] \cap H \leq K$ e quindi per 1.1, H è normale sensitivo. Perciò G è un B-gruppo. Tenuto infine presente che è metabeliano un SB-gruppo, essendo tale un $\overline{ST}$ -gruppo [5], concludiamo che è anche metabeliano un gruppo che ha un sistema locale di SB-gruppi.

TEOREMA 1.3. *Un gruppo è un SB-gruppo se e solo se è un $\overline{ST}$ -gruppo.*

Dimostrazione. Come osservato, un SB-gruppo è un $\overline{ST}$ -gruppo. Inversamente, sia G un $\overline{ST}$ -gruppo. Se G è abeliano, allora esso è un SB-gruppo; se no, G deve essere periodico [5] e quindi localmente finito. Pertanto ogni sottogruppo finitamente generato di G è un T-gruppo risolubile finito e, quindi, un B-gruppo [2]. Ma allora G è un B-gruppo in virtù di 1.2 e dunque un SB-gruppo.

COROLLARIO 1.4. *Le seguenti condizioni sul gruppo localmente finito G sono fra loro equivalenti:*

- a) G è un B-gruppo;
- b) ogni sottogruppo finitamente generato di G è un B-gruppo;
- c) ogni sottogruppo finitamente generato di G è un $\overline{T}$ -gruppo;
- d) G è un $\overline{T}$ -gruppo.

2. Nel presente numero diamo un teorema generale di struttura di un B-gruppo. Incominciamo con la

PROPOSIZIONE 2.1. *Un 2-gruppo è un $\overline{T}$ -gruppo se e solo se è o abeliano o hamiltoniano.*

Dimostrazione. Un gruppo abeliano o hamiltoniano è senz'altro un $\overline{T}$ -gruppo. Inversamente, supponiamo che il 2-gruppo G sia un $\overline{T}$ -gruppo. Per far vedere che G è o abeliano o hamiltoniano ci basta [5] mostrare che G è

localmente finito. Mostriamo la locale finitezza di G provando che ogni gruppo fattoriale non identico G/N di G contiene un sottogruppo normale abeliano non identico. G/N è un 2-gruppo ed un $\bar{T}$ -gruppo; se allora $\bar{u}, \bar{v}$ sono involuzioni di G/N , il sottogruppo $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ è un 2-gruppo diedrale ed un $\bar{T}$ -gruppo, e perciò esso è abeliano. Pertanto il sottogruppo di G/N generato da tutti gli elementi di periodo 2 è un sottogruppo abeliano normale non identico.

LEMMA 2.2. *Sia G un B-gruppo. Se G ha un'involuzione, allora esiste un sottogruppo normale N di G tale che G/N è un gruppo localmente ciclico non identico oppure il gruppo dei quaternioni d'ordine 8.*

Dimostrazione. Sia u un'involuzione di G ; l'insieme dei sottogruppi, $N \triangleleft G$ tali che $N \cap \langle u \rangle = 1$, parzialmente ordinato per inclusione, ha un elemento massimale M , $M \neq G$. $\bar{G} = G/M$ è un B-gruppo ed $\bar{u} = uM$ è una sua involuzione. Sia $\bar{v}$ un'involuzione di $\bar{G}$, $\bar{v} \neq \bar{u}$. Il sottogruppo $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ è un gruppo diedrale e perciò esso contiene un sottogruppo non triviale $\bar{A}$ tale che $\bar{A} \triangleleft \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ e $\bar{A} \cap \langle \bar{u} \rangle = 1$. Nel B-gruppo $\bar{G}$ esiste un $\bar{N} \triangleleft \bar{G}$ tale che $\bar{N} \cap \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \bar{A}$. Posto $\bar{N} = N/M$, abbiamo $N \triangleleft G$, $N \cap \langle u \rangle = 1$ ed $M \leq N$ con $M \neq N$, e ciò contraddice la massimalità di M . Perciò $\bar{u}$ è la sola involuzione di $\bar{G}$. Se $\bar{G}$ non è un 2-gruppo, esso contiene un elemento $\bar{z}$ con periodo infinito o finito e dispari, ed il sottogruppo $\langle \bar{u}, \bar{z} \rangle$ risulta abeliano. Perciò $\langle \bar{z} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{z} \rangle \cap \bar{L}$ per un $\bar{L} \triangleleft \bar{G}$, e veniamo ad ottenere, come sopra, una contraddizione alla massimalità di M . Dunque il B-gruppo $\bar{G}$ è un 2-gruppo con una sola involuzione. Da qui abbiamo la conclusione voluta in virtù di 2.1.

Un B-gruppo finito è risolubile [2]; inoltre se H è un sottogruppo ciclico infinito del B-gruppo G , detto K il sottogruppo di indice 2 di H , abbiamo $K = H \cap N$ con un $N \triangleleft G$ e perciò G/M contiene un'involuzione poichè esso contiene il gruppo HN/N che è isomorfo al gruppo H/K d'ordine 2. Pertanto da qui e da 2.2 abbiamo la

PROPOSIZIONE 2.3. *Un B-gruppo perfetto è privo di involuzioni ed inoltre è periodico ed ha ordine infinito.*

Sia G un B-gruppo. Allora il suo derivato secondo G'' coincide col derivato terzo G''' e perciò, per 2.3, gli elementi di G'' hanno tutti periodo finito e dispari. Se u, v sono elementi periodici di G , allora i gruppi $\langle u, v \rangle \cap G''$ e $\langle u, v \rangle / \langle u, v \rangle \cap G''$ sono periodici e quindi periodico è il gruppo $\langle u, v \rangle$. Possiamo allora dire che G è un gruppo separato nel senso che l'insieme dei suoi elementi periodici è un sottogruppo. Perveniamo così al

TEOREMA 2.4. *Un B-gruppo è un gruppo separato e gli elementi del suo derivato secondo hanno tutti periodo finito e dispari.*

Siccome un $S\bar{T}$ -gruppo non abeliano risulta periodico [5], da 1.3 e 2.4 otteniamo il

COROLLARIO 2.5. *Un gruppo senza torsione è un B-gruppo se e solo se abeliano.*

3. In questo ultimo numero daremo alcune condizioni sufficienti affinché sia risolubile un B-gruppo.

Osserviamo che se un B-gruppo è un gruppo semplice, allora ogni suo sottogruppo non identico è un gruppo semplice. Ne deriva che un B-gruppo semplice è ciclico d'ordine primo se esso è un SN-gruppo. Osserviamo anche che se il B-gruppo G è un $(SN)^H$ -gruppo (vale a dire un gruppo ogni cui gruppo fattoriale è pure un SN-gruppo) e se $K \triangleleft H \leq G$, esiste un $N \triangleleft G$ tale che $K = H \cap N$ e perciò il gruppo H/K è isomorfo al sottogruppo NH/N del gruppo G/N ; pertanto H/K è un SN-gruppo. Dunque se un B-gruppo è un $(SN)^H$ -gruppo, allora tutti i suoi sottogruppi sono $(SN)^H$ -gruppi.

LEMMA 3.1. *Un B-gruppo periodico e finitamente generato è finito se esso è un $(SN)^H$ -gruppo.*

Dimostrazione. Supponiamo che il B-gruppo periodico e finitamente generato G sia un $(SN)^H$ -gruppo. Allora il B-gruppo risolubile G/G'' è finito e perciò ([6], part I, p. 30) G'' è finitamente generato come lo è G . Supponiamo $G'' \neq 1$. Allora G'' ha un sottogruppo normale massimale N . Per l'osservazione, il B-gruppo semplice G''/N è un SN-gruppo, quindi G''/N è ciclico d'ordine primo. Ma allora $G'' \neq G'''$, contro il fatto che la serie derivata del T-gruppo G termina con G'' . Dunque abbiamo $G'' = 1$ e, quindi, G è un gruppo finito.

TEOREMA 3.2. *Un B-gruppo è risolubile se esso è un $(SN)^H$ -gruppo.*

Dimostrazione. Poiché per 2.4 il derivato secondo di un B-gruppo è periodico, in virtù dell'osservazione e di 3.1 ogni sottogruppo finitamente generato del derivato secondo G'' di un B-gruppo, che è un $(SN)^H$ -gruppo, risulta un T-gruppo finito risolubile e, quindi, metabeliano. Allora G'' stesso risulta metabeliano, quindi $G'' = 1$ e G è risolubile.

LEMMA 3.3. *Un B-gruppo periodico e finitamente generato è finito se ogni suo sottogruppo con due generatori è finito.*

Dimostrazione. Sia G un B-gruppo periodico, finitamente generato ogni cui sottogruppo con due generatori è finito. Allora il gruppo G/G'' è finito e perciò G'' è finitamente generato. Supponiamo $G'' \neq 1$. Allora G'' ha un sottogruppo normale massimale N . Il B-gruppo $\bar{G} = G''/N$ non è ciclico poiché $G'' = G'''$. Allora $\bar{G}$ contiene elementi $\bar{u}, \bar{v}$ tali che il sottogruppo $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ non è ciclico. Siano u, v elementi di G'' tali che $\bar{u} = uN, \bar{v} = vN$. Allora $\langle u, v \rangle$ è un gruppo finito in virtù delle ipotesi fatte su G e per 2.4, quindi $\langle u, v \rangle$ è un gruppo risolubile poichè esso è un $\bar{T}$ -gruppo finito [1]. Ne segue che è risolubile il gruppo $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ e, quindi, $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ contiene un sottogruppo normale proprio e non identico $\bar{K}$. Allora esiste un $\bar{L} \triangleleft \bar{G}$ tale che $\bar{K} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \cap \bar{L}$ con $\bar{L}$ sottogruppo non triviale di $\bar{G}$. Ma $\bar{G}$ è un gruppo semplice, e perciò abbiamo ottenuto una contraddizione che prova essere $G'' = 1$. Quindi G è un gruppo finito.

TEOREMA 3.4. *Un B-gruppo è risolubile se e solo se ogni suo sottogruppo periodico con due generatori è finito.*

Dimostrazione. È chiaro che in un B-gruppo risolubile ogni sottogruppo periodico con due generatori è finito. Viceversa, il derivato secondo di un tale gruppo, per 2.4 e 3.3 risulta localmente metabeliano e, quindi, metabeliano; allora il gruppo stesso risulta risolubile.

Un gruppo infinito ogni cui sottogruppo non triviale ha ordine p , dove p è un numero primo dispari, è detto un gruppo di Tarski ([6]), part. 1, p. 97). L'esistenza di un gruppo di Tarski ci permette di asserire che la classe dei B-gruppi è una sottoclasse propria di quella dei $\bar{T}$ -gruppi; infatti non è difficile provare che un gruppo prodotto diretto di un gruppo di Tarski e di un gruppo ciclico infinito risulta un $\bar{T}$ -gruppo ma non un B-gruppo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] I. N. ABRAMOVSKII (1966) - *Locally generalized hamiltonian groups*, «Siberian Math. J.», 7, 391-393.
- [2] S. BAUMAN (1974) - *The intersection map of subgroups*, «Arch. Math.», 25, 337-340.
- [3] A. G. KUROSH (1960) - *The theory of groups*. Chelsea.
- [4] B. H. NEUMANN (1954) - *An essay on free products of groups with amalgamation*, «Phil. Trans. Royal Soc.», London (A), 246, 503-554.
- [5] D. J. S. ROBINSON (1964) - *Groups in which normality is a transitive relation*, «Proc. Camb. Phil. Soc.», 60, 21-38.
- [6] D. J. S. ROBINSON (1972) - *Finiteness conditions and generalized soluble groups*. Springer.