Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Giulio Mattei

## Sulla instabilità gravitazionale secondo Jeans di un plasma anisotropo con equazioni di stato politropiche generalizzate

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **64** (1978), n.2, p. 170–176.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_2_170_0>

**Fisica matematica.** — *Sulla instabilità gravitazionale secondo Jeans di un plasma anisotropo con equazioni di stato politropiche generalizzate.* Nota di GIULIO MATTEI (*), presentata (**) dal Socio C. CATTANEO.

SUMMARY. — In this paper we study Jeans' gravitational instability of an anisotropic plasma with generalized polytropic equations of state. The dispersion equation is given and discussed and the critical value of the wavelength is determined for the cases of propagation: (i) perpendicular to the magnetic field; (ii) along the magnetic field.

## 1. INTRODUZIONE

Le ricerche dedicate allo studio della instabilità gravitazionale secondo Jeans sono assai numerose; notevole impulso ad esse è stato dato dai lavori, oramai classici, di Fermi e Chandrasekhar (1). In queste ricerche il mezzo è di volta in volta descritto da un modello fisico-matematico diverso.

Poiché non risulta all'Autore che sia stato esaminato il caso di un plasma anisotropo con equazioni di stato politropiche generalizzate, scopo di questa Nota è quello di studiare la instabilità gravitazionale secondo Jeans per detto plasma. Questo modello di plasma è stato introdotto da B. Abraham-Shrauner in [3], lavoro a cui senz'altro si rimanda per quanto concerne il contenuto fisico del modello, il campo della sua applicabilità ed ogni particolare dettaglio. (In [3] si studia anche la propagazione di onde libere di piccola ampiezza, mentre la propagazione di onde guidate è esaminata in [4]).

Nel n. 2 della presente Nota si richiama sinteticamente il quadro di equazioni di base descriventi il modello di plasma in questione. Nel n. 3 si danno le equazioni delle perturbazioni. Nel n. 4 si determina e si discute l'equazione di dispersione e si stabilisce la condizione di instabilità gravitazionale nei due casi di propagazione parallela ed ortogonale alla direzione del campo magnetico.

## 2. PLASMA ANISOTROPO CON EQUAZIONI DI STATO POLITROPICHE GENERALIZZATE

Le equazioni di base che descrivono il plasma nel modello introdotto in [3] sono intanto: l'equazione di moto, l'equazione del campo magnetico, l'equazione di continuità di massa (e l'equazione di Poisson se si tiene conto

(*) Facoltà di Ingegneria dell'Università di Pisa.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1978.

(1) In [1] è data sull'argomento una bibliografia di 39 lavori, ai quali va aggiunto il recente lavoro [2].

delle azioni gravitazionali), tutte scritte nella forma abituale. Il tensore delle pressioni, **P**, la cui divergenza compare nell'equazione di moto, è fornito dalla

$$\mathbf{P} = p_\perp \mathbf{I} + (p_\parallel - p_\perp)\, \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \,, \tag{1}$$

in cui **I** è il tensore fondamentale, $\boldsymbol{n}$ il versore del vettore induzione magnetica **B** e gli scalari $p_\parallel$ e $p_\perp$ sono rispettivamente la pressione parallelamente ed ortogonalmente ad $\boldsymbol{n}$ ($\otimes$ è simbolo di prodotto tensoriale). Alle equazioni di cui sopra si aggiungono due equazioni di stato politropiche generalizzate introdotte in [3], n. 1, nella forma

$$\frac{p_\parallel \mathrm{B}^\alpha}{\rho^\beta} = c_\parallel \quad , \quad \frac{p_\perp}{\rho^\varepsilon \mathrm{B}^\gamma} = c_\perp \,. \tag{2}$$

Nelle (2) $c_\parallel$ e $c_\perp$ sono delle costanti, $\rho$ è la densità di massa, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ed $\varepsilon$ sono indici politropici, costanti.

Le (2) generalizzano equazioni di stato largamente usate nella Fisica matematica dei plasmi. Per esempio (cfr. [3]): (i) per $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\varepsilon = \gamma = 1$ si ritrova il ben noto modello di plasma introdotto da Chew, Goldberger e Low [5] (nel seguito plasma CGL); (ii) per $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \varepsilon = 1$ si ha una equazione di stato isoterma per entrambe le pressioni (caso questo che interessa la propagazione di onde ionico-acustiche); (iii) per $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \varepsilon = 1$ si ha un'equazione di stato isoterma per la sola $p_\parallel$, modello questo che sembra di interesse per questioni connesse con lo studio del vento solare; (iv) per $c_\parallel = c_\perp$, $\alpha = \gamma = 0$ e $\beta = \varepsilon = c_p/c_v$ ($c_p$ calore specifico a pressione costante e $c_v$ calore specifico a volume costante) infine si ha il modello del plasma adiabatico descritto dalle ordinarie equazioni della magnetofluidodinamica (plasma MFD).

## 3. LE EQUAZIONI DELLE PERTURBAZIONI

Le equazioni delle perturbazioni sono (in unità di Gauss)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\,\delta\mathbf{P} + \frac{1}{4\pi\mu\rho}(\mathrm{rot}\,\delta\mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} + \mathrm{grad}\,\delta\mathrm{U} \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\delta\rho = -\rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \tag{4}$$

$$\nabla^2 \delta\mathrm{U} = -4\pi\mathrm{G}\,\delta\rho \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\delta\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B}) \tag{6}$$

$$\frac{\delta p_\parallel}{p_\parallel} + \alpha\frac{\delta\mathrm{B}}{\mathrm{B}} = \beta\frac{\delta\rho}{\rho} \tag{7}$$

$$\frac{\delta p_\perp}{p_\perp} = \varepsilon\frac{\delta\rho}{\rho} + \gamma\frac{\delta\mathrm{B}}{\mathrm{B}} \,. \tag{8}$$

In esse $\boldsymbol{v}$ è la perturbazione nel campo di velocità, $t$ il tempo, $\rho$ la densità nello stato imperturbato, $\delta\mathbf{P}$ la perturbazione nel tensore delle pressioni, $\mu$ la permeabilità magnetica, $(1/\mu)\,\delta\mathbf{B}$ la perturbazione nel campo magnetico, $\mathbf{B}/\mu$ il campo magnetico (uniforme) nello stato imperturbato, $\delta\mathrm{U}$ la perturbazione nel potenziale gravitazionale, $\delta\rho$ la perturbazione nella densità, G la costante di gravitazione universale, $p_\parallel$ e $p_\perp$ i valori nello stato imperturbato della pressione parallelamente e ortogonalmente a $\mathbf{B}$, $\delta p_\parallel$ e $\delta p_\perp$ le corrispondenti perturbazioni.

Le (3)–(8) si ottengono linearizzando le equazioni di cui al n. 2 tenuto conto degli effetti gravitazionali nel *modello di Jeans.*

Usando (7) e (8) dalla (1) si ricava per la perturbazione nel tensore delle pressioni la

$$\delta\mathbf{P} = \left(\frac{\varepsilon p_\perp}{\rho}\,\delta\rho + \frac{\gamma p_\perp}{\mathrm{B}}\,\delta\mathrm{B}\right)\mathbf{I} + \mathbf{C} + \mathbf{D}\,, \tag{9}$$

dove si sono introdotti i due tensori simmetrici

$$\mathbf{C} = \left(\frac{\beta p_\parallel - \varepsilon p_\perp}{\rho}\,\delta\rho - \frac{\alpha p_\parallel + \gamma p_\perp}{\mathrm{B}}\,\delta\mathrm{B}\right)\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} \tag{10}$$

$$\mathbf{D} = (p_\parallel - p_\perp)\,(\boldsymbol{n}\otimes\delta\boldsymbol{n} + \delta\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}) \tag{11}$$

in cui $\delta\boldsymbol{n}$ si ricava dalla

$$\delta\mathbf{B} = \delta\mathrm{B}\boldsymbol{n} + \mathrm{B}\delta\boldsymbol{n}\,. \tag{12}$$

Le (3)–(6), in cui $\delta\mathbf{P}$ è specificato dalle (9)–(12), costituiscono un sistema determinato lineare di 8 equazioni differenziali scalari alle derivate parziali nelle (8) funzioni incognite scalari: $\delta\rho$, $\delta\mathrm{U}$, le tre componenti di $\boldsymbol{v}$ e le tre componenti di $\delta\mathbf{B}$.

## 4. La condizione di instabilità gravitazionale

Senza pregiudizio per la generalità possiamo introdurre una terna cartesiana (inerziale) di riferimento T $(o\,; x\,, y\,, z)$, di versori $\boldsymbol{i}_1\,, \boldsymbol{i}_2\,, \boldsymbol{i}_3$ con l'asse $z$ parallelo e concorde al campo magnetico imperturbato e con la direzione di propagazione delle perturbazioni (piane) giacente nel piano $(x\,,z)$. Indichiamo con $b_x\,, b_y\,, b_z\,(=\delta\mathrm{B})$ le componenti del vettore $\delta\mathbf{B}$ relative a T.

Da (9) segue

$$\operatorname{div}\delta\mathbf{P} = \frac{\varepsilon p_\perp}{\rho}\operatorname{grad}\delta\rho + \frac{\gamma p_\perp}{\mathrm{B}}\operatorname{grad} b_z + \operatorname{div}\mathbf{C} + \operatorname{div}\mathbf{D}\,. \tag{13}$$

Usando la (12) da (10) e (11) seguono le

$$\operatorname{div}\mathbf{C} = \left(\frac{\beta p_\parallel - \varepsilon p_\perp}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\delta\rho - \frac{\alpha p_\parallel + \gamma p_\perp}{B}\frac{\partial b_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}_3 \tag{14}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \frac{p_\parallel - p_\perp}{B}\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}\boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial b_y}{\partial z}\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial b_x}{\partial x}\boldsymbol{i}_3\right). \tag{15}$$

Per (13)-(15), seguono da (3) le tre equazioni scalari di moto

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(\frac{\gamma p_\perp}{\rho B} + \frac{B}{4\pi\mu\rho}\right)\frac{\partial b_z}{\partial x} + \left(\frac{p_\parallel - p_\perp}{B\rho} - \frac{B}{4\pi\mu\rho}\right)\frac{\partial b_x}{\partial z} + \frac{\varepsilon p_\perp}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial x}\delta\rho - \frac{\partial}{\partial x}\delta U = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \left(\frac{p_\parallel - p_\perp}{B\rho} - \frac{B}{4\pi\mu\rho}\right)\frac{\partial b_y}{\partial z} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{\alpha p_\parallel}{B\rho}\frac{\partial b_z}{\partial z} + \frac{\beta p_\parallel}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial z}\delta\rho + \frac{p_\parallel - p_\perp}{B\rho}\frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}\delta U = 0. \tag{18}$$

Da (4), (5) e (6) discendono poi le

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + \rho\frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta U + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\delta U + 4\pi G\,\delta\rho = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} - B\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} - B\frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} + B\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \tag{23}$$

Le (16)-(23) sono un sistema lineare di 8 equazioni scalari nelle 8 funzioni incognite $v_x, v_y, v_z, b_x, b_y, b_z, \delta\rho$ e $\delta U$.

Notiamo anzitutto che le perturbazioni $v_y$ e $b_y$ sono disaccoppiate dalle altre e soddisfano alla equazione (che subito discende da (17) e (22))

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{h}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(v_y, b_y) = 0 \tag{24}$$

dove si è posto

$$h = 2\, p_m + p_\perp - p_\parallel \tag{25}$$

con $p_m = B^2/8\,\pi\mu$ pressione magnetica.

Se è $h > 0$, siamo in presenza di un effettivo fenomeno di propagazione. In particolare, perturbazioni piane sinusoidali di vettore d'onda $\boldsymbol{k}$ e frequenza angolare $\omega$ si propagano con velocità di fase reale $u = \omega/k$ data da

$$u^2 = \left(A^2 + \frac{p_\perp - p_\parallel}{\rho}\right) \cos^2\theta\,, \tag{26}$$

dove $A^2 = B^2/4\,\pi\mu\rho$ è il quadrato della velocità di Alfvén e $\theta$ l'angolo fra $\boldsymbol{k}$ e $\mathbf{B}$. La (26) caratterizza le onde di Alfvén modificate dall'effetto della anisotropia nel tensore delle pressioni.

Se è $h < 0$, $u$ diventa immaginaria e ciò è collegato ad un ben noto fenomeno di instabilità nei plasmi anisotropi: la cosidetta instabilità «hose» (cfr., per esempio [3]).

Si noti che la propagazione di onde di Alfvén modificate dalla anisotropia del tensore delle pressioni ($h > 0$), ovvero l'instabilità «hose» ($h < 0$), non dipendono dagli indici politropici.

Per le rimanenti perturbazioni $v_x, v_z, b_x, b_z, \delta\rho$ e $\delta U$, imponendo al sistema (16), (18), (19), (20), (21), (23) la soluzione del tipo onda piana sinusoidale $\exp\left[i\,(\omega t - k_x x - k_z z)\right]$, si giunge, procedendo nel modo ben noto, alla seguente equazione di dispersione

$$\begin{aligned}
&\left[\omega^2 - A^2 k^2 - (\varepsilon + \gamma)\frac{p_\perp}{\rho} k_x^2 - \frac{p_\perp - p_\parallel}{\rho} k_z^2 + \frac{4\,\pi G\rho}{k^2} k_x^2\right] \cdot \\
&\cdot \left[\omega^2 - \frac{\beta p_\parallel}{\rho} k_z^2 + \frac{4\,\pi G\rho}{k^2} k_z^2\right] + k_x^2 k_z^2 \left(\frac{\varepsilon p_\perp}{\rho} - \frac{4\,\pi G\rho}{k^2}\right) \cdot \\
&\cdot \left[\frac{4\,\pi G\rho}{k^2} + \frac{(\alpha - \beta + 1)\, p_\parallel - p_\perp}{\rho}\right] = 0\,.
\end{aligned} \tag{27}$$

La (27), per $k$ prefissato reale, è un'equazione di secondo grado in $\omega^2$: vi sono perciò, in una generica direzione, due possibili modi di propagazione di assegnata lunghezza d'onda $\lambda\,(\lambda = 2\,\pi/|k|)$, influenzati dagli indici politropici; tali modi corrispondono ai due modi di propagazione magnetoacustici nel plasma MFD.

Esaminiamo i due casi particolari di maggiore importanza.

### 4.1. *Propagazione perpendicolare al campo magnetico.*

In questo caso è $(\partial/\partial z) = 0$. Da (21) e dalla div $\delta\mathbf{B} = 0$ segue $b_x = \text{cost}$; da (17), (18) e (22) discende che $v_y, v_z$ e $b_y$ non si propagano. Da (27) si ha l'equazione di dispersione

$$\omega^2 - k^2 [A^2 + (\varepsilon + \gamma) p_\perp/\rho] + 4\pi G\rho = 0 . \tag{28}$$

La (28) indica che c'è un valore critico $\lambda_c$ della lunghezza d'onda tale che $\forall\lambda > \lambda_c$ c'è sempre instabilità gravitazionale, mentre $\forall\lambda < \lambda_c$ c'è sempre stabilità gravitazionale; tale valore è dato dalla

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\pi [A^2 + (\varepsilon + \gamma) p_\perp/\rho]}{G\rho}} . \tag{29}$$

Dunque la condizione di instabilità gravitazionale è in questo caso influenzata dagli indici politropici $\varepsilon$ e $\gamma$. Per $\varepsilon = \gamma = 1$ la (29) ridà il valore di $\lambda_c$ per il plasma CGL, valore determinato in [6], (47).

4.2. *Propagazione parallela al campo magnetico.*

In questo caso è $(\partial/\partial x) = 0$. Da (23) e dalla div $\delta\mathbf{B} = 0$ segue che $b_z = \text{cost}$. L'equazione di dispersione (27) si spezza nella

$$\omega^2 - \left(A^2 + \frac{p_\perp - p_\parallel}{\rho}\right) k^2 = 0 \tag{30}$$

(cfr. (26) con $\theta = 0$) e nella

$$\omega^2 - \frac{\beta p_\parallel}{\rho} k^2 + 4\pi G\rho = 0 \;^{(2)} . \tag{31}$$

La (31) indica che $\forall\lambda > \lambda_c$ ($< \lambda_c$) c'è sempre instabilità (stabilità) gravitazionale, con $\lambda_c$ dato dalla

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\pi\beta p_\parallel/\rho}{G\rho}} . \tag{32}$$

Dunque la condizione di instabilità gravitazionale è in questo caso influenzata dall'indice politropico $\beta$. Per $\beta = 3$ la (32) ridà il valore di $\lambda_c$ per il plasma CGL [6] (45).

Ricordiamo che per un plasma MFD, detta $a$ l'ordinaria velocità del suono, nel caso di propagazione perpendicolare al campo magnetico si ha

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\pi (A^2 + a^2)}{G\rho}} \tag{33}$$

(2) In questo caso anche le due perturbazioni $v_x$, $b_x$ sono disaccoppiate dalle altre e soddisfano alla stessa equazione, (24), cui soddisfano le due perturbazioni $v_y$, $b_y$. Per le rimanenti perturbazioni $v_z$, $\delta\rho$ e $\delta U$ si è condotti alla (31).

e nel caso di propagazione parallela

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\pi a^2}{G\rho}} . \tag{34}$$

Possiamo concludere osservando che da (33) si ottiene la (29) e da (34) la (32) se si introducono formalmente le cosidette velocità « perpendicolare » e « parallela » del suono (3)

$$a_{\perp}^2 = (\varepsilon + \gamma)\, p_{\perp}/\rho \quad , \quad a_{\parallel}^2 = \beta p_{\parallel}/\rho$$

e si effettuano le corrispondenze formali

$$a^2 \leftrightarrow a_{\perp}^2 \quad , \quad a^2 \leftrightarrow a_{\parallel}^2 .$$

## BIBLIOGRAFIA

[1] G. MATTEI – *Sulla instabilità gravitazionale secondo Jeans di un plasma dissipativo in presenza di effetto Hall*, in corso di stampa sugli « Annali di Matematica Pura ed Applicata ».

[2] R. P. S. CHHONKHAR e P. K. BATHIA (1977) – *Larmor radius effects on the gravitational instability of a two-component plasma*, « J. Plasma Physics », *18*, 273–286.

[3] B. ABRAHAM-SHRAUNER (1973) – *Small amplitude hydromagnetic waves for a plasma with a generalized polytrope law*, « Plasma Physics », *15*, 375–385.

[4] M. DOBRÓKA (1975) – *Small amplitude hydromagnetic waves in wave-guides, treated by generalized polytropic equations of state*, « Plasma Physics », *17*, 1171–1172.

[5] G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER e F. E. LOW (1956) – *The Boltzmann equation and one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions*, « Proc. Roy. Soc. London », ser. A, *236*, 112–118.

[6] J. E. C. GLIDDON (1966) – *Gravitational instability of anisotropic plasma*, « Astrophysical J. », *145*, 583–588.

[7] B. LEHNERT (1964) – *Dynamics of charged particles*, North Holland Pub. Co., Amsterdam.

(3) Per il plasma CGL ($\varepsilon = \gamma = 1$, $\beta = 3$) tali velocità sono state introdotte in [7], p. 147.