Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Fabio Bardelli

Osservazioni sui moduli delle superfici cubiche generali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.2, p. 137–141.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_2_137_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1978.

Geometria. — *Osservazioni sui moduli delle superfici cubiche generali* (*). Nota di FABIO BARDELLI, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this Note, using a classical theorem of Sylvester, we find the equations and prove the rationality of an affine open set which is dense in the space of moduli of non-singular cubic surfaces of the three-dimensional complex projective space.

In questa Nota si costruisce in modo esplicito un aperto affine denso nello spazio dei moduli delle superfici cubiche non singolari dello spazio proiettivo complesso di dimensione 3. Tale costruzione si basa essenzialmente sulle seguenti due osservazioni. La prima è che ogni applicazione biregolare fra superfici cubiche non singolari è indotta da una proiettività dello spazio ambiente. La seconda è che una superficie cubica «generale» ammette una ed una sola rappresentazione di Sylvester $\sum_{i=0}^{4} \lambda_i \cdot e_i^3$ colle e_i forme lineari a 4 a 4 linearmente indipendenti e λ_i costanti $\neq 0$. Quindi una classe di superfici cubiche generali isomorfe determina una quintupla $(\lambda_0, \cdots, \lambda_4)$ a meno di un fattore di proporzionalità non nullo e di una arbitraria permutazione.

Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$ ove le λ_i siano coordinate omogenee tali permutazioni danno luogo ad un gruppo finito G di proiettività. Il quoziente di un opportuno aperto di Zariski di $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$ per G dà lo spazio dei moduli delle superfici cubiche generali. Le considerazioni del n. 3 sono volte alla costruzione esplicita di tale quoziente ed alla dimostrazione della sua razionalità.

Desidero ringraziare il prof. F. Gherardelli per avermi suggerito questa ricerca.

1. Proviamo la seguente semplice

PROPOSIZIONE 1. *Ogni applicazione biregolare fra superfici cubiche non singolari è indotta da una proiettività di* $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$.

Dimostrazione. Basta provare che se $f: S_1 \to S_2$ è un'applicazione biregolare fra due superfici cubiche non singolari, f porta sezioni piane di S_1 in sezioni piane di S_2. Dalla formula (cfr. [1]) $K_{S_1} = (\deg S_1 - \dim S_1 - 2) L$, ove K_{S_1} è la classe canonica di S_1 e L una sua sezione iperpiana, segue immediatamente che il sistema lineare delle sezioni piane di una superficie cubica non singolare è il sistema anticanonico completo e quindi è invariante per applicazioni biregolari.

Dalla Proposizione 1 segue che la classificazione analitica delle superfici cubiche non singolari coincide colla classificazione proiettiva.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A del C.N.R.
(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1978.

OSSERVAZIONI. *a*) È opportuno rilevare che il risultato della Proposizione precedente vale tale e quale per le trasformazioni biregolari fra ipersuperfici non singolari di ordine n del $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ e per quelle di ordine $n+2$ sostituendo il sistema lineare canonico a quello anticanonico.

b) Il fatto che $f: S_1 \rightarrow S_2$ porti sezioni piane in sezioni piane si può provare anche in modo elementare diretto: se C è una sezione piana generica di S_1, $f(C)$ è ancora piana perché di genere 1 e grado 3 (se non fosse piana la sua proiezione su di un piano da un suo punto sarebbe non singolare di grado 2 e quindi razionale). Le sezioni piane non generiche di S_1 sono quelle con piani tangenti ad S_1 in qualche punto.

2. È ben noto (cfr. [2]) il seguente

TEOREMA (Sylvester). *L'equazione di una generica superficie cubica* S *si può ridurre in uno ed un sol modo alla «forma canonica»*

$$\sum_{i=0}^{4} \lambda_i \cdot e_i^3 = 0 \tag{1}$$

ove $e_i = 0$ *sono le equazioni di* 5 *piani* π_i *di* $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ *a* 4 *a* 4 *linearmente indipendenti e le* λ_i *sono costanti tutte* $\neq 0$ (*definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo*).

Diremo che la (1) è la *rappresentazione di Sylvester* di S.

In [2] oltre ad una dimostrazione del Teorema precedente si esaminano in dettaglio i casi di quelle superfici cubiche non singolari che non ammettono rappresentazioni di Sylvester o ne ammettono infinite. Nel seguito «superficie cubica generica» sarà sinonimo di superficie cubica che ammette una ed una sola rappresentazione di Sylvester. Indichiamo con $\mathscr{C}$ l'insieme di tali superfici. $\mathscr{C}$ è un aperto di Zariski nello spazio delle superfici cubiche non singolari. Ricordiamo anche che le superfici rappresentate da un'equazione del tipo (1) sono non singolari se

$$\sum_{i=0}^{4} \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \neq 0 . \tag{2}$$

Supponiamo fissato in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ un sistema di coordinate omogenee (x_0, x_1, x_2, x_3) e sia $S \in \mathscr{C}$ colla rappresentazione di Sylvester $\sum_{i=0}^{4} \lambda_i e_i^3 = 0$ relativa a certi piani $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ 4 a 4 linearmente indipendenti. Esiste una ed una sola proiettività del $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ che porta $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ ordinatamente nei piani coordinati $x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, e nel piano «unità» $x_4 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Quindi ogni superficie cubica $S \in \mathscr{C}$ si può rappresentare colla equazione $\sum_{i=0}^{4} \lambda_i x_i^3 = 0$.

Indichiamo con G_5 il gruppo totale su 5 oggetti e con $\{S\}$ la famiglia finita delle superfici cubiche di equazioni rispettive $\sum_{i=0}^{4} \lambda_{\sigma(i)} x_i^3 = 0$ $\forall \sigma \in G_5$, ottenute permutando i coefficienti λ_i dell'equazione canonica di S. Ogni superficie di $\{S\}$ è proiettivamente equivalente ad S. Dall'unicità della rappresentazione di Sylvester segue allora che S_1 e $S_2 \in \mathscr{C}$ sono proiettivamente equivalenti se e solo se $\{S_1\} = \{S_2\}$. Pertanto l'insieme M delle famiglie $\{S\}$ al variare di S in $\mathscr{C}$

è in corrispondenza biunivoca coll'insieme delle classi di superfici cubiche generiche proiettivamente (o biregolarmente) equivalenti.

Le quintuple di numeri complessi $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ sono definite a meno di un fattore di proporzionalità e quindi si possono riguardare come coordinate in $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$. Poichè $\lambda_i \neq 0$ per ogni i, si ottengono punti di $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})\setminus \mathrm{H}$ ove $\mathrm{H} = \{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 0\}$.

Posto poi $\mathrm{W} = \left\{\sum_{i=0}^{4} \frac{1}{\pm\sqrt{\lambda_i}} = 0\right\}$ le superfici $\mathrm{S} \in \mathscr{C}$ si rappresentano coi punti di $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})\setminus\{\mathrm{H} \cup \mathrm{W}\}$. Infine l'insieme M è rappresentato dal quoziente $\mathrm{V} = \mathbf{P}^4(\mathbf{C})\setminus\{\mathrm{H} \cup \mathrm{W}\}/\mathscr{R}$, ove $\mathscr{R}$ è la relazione di equivalenza indotta dall'azione del G_5 su $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$ (se $\sigma \in \mathrm{G}_5$, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbf{P}^4(\mathbf{C})$, $\sigma(\lambda) = (\lambda_{\sigma(0)}, \lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, \lambda_{\sigma(3)}, \lambda_{\sigma(4)})$).

Nel numero successivo determineremo esplicitamente un modello della varietà algebrica $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})\setminus \mathrm{H}/\mathscr{R}$.

3. Consideriamo le funzioni simmetriche elementari nelle 5 lettere

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 : f_r(x) = \sum_{0<i_1<\cdots<i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r}, \qquad r = 1, \cdots, 5$$

e l'applicazione razionale $f : \mathbf{P}^4(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^{10}(\mathbf{C})$ definita dalle 11 forme di grado 20 nelle x:

$$\begin{aligned}(3) \qquad & y_0 = f_5^4 \ ; \ y_1 = f_1^5 f_5^3 \ ; \ y_2 = f_1^3 f_2 f_5^3 \ ; \ y_3 = f_1^2 f_3 f_5^3 \ ; \ y_4 = f_1 f_4 f_5^3 \ ; \\ & y_5 = f_2^5 f_5^2 \ ; \ y_6 = f_2 f_3 f_5^3 \ ; \ y_7 = f_4 f_2^3 f_5^2 \ ; \ y_8 = f_3^5 f_5 \ ; \ y_9 = f_4 f_3^2 f_5^2 \ ; \\ & y_{10} = f_4^5\end{aligned}$$

f è un morfismo regolare ove f_4 e f_5 non sono simultaneamente nulle. In particolare f è regolare in $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})\setminus \mathrm{H}$ perché ivi $f_5 \neq 0$. Poniamo $\mathrm{Y} = f(\mathbf{P}^4(\mathbf{C})\setminus \mathrm{H})$, Y è irriducibile e vale la seguente

PROPOSIZIONE 2. *$\mathbf{P}^4(\mathbf{C})\setminus \mathrm{H}/\mathscr{R}$ è isomorfo ad* Y.

Dimostrazione. Si deve provare che se $y \in \mathrm{Y}$ e $\mathrm{P} \in f^{-1}(y)$, $f^{-1}(y)$ è costituita esattamente dai trasformati di P per l'azione del gruppo G_5.

Per questo basta verificare che le coordinate $(y_0, \cdots, y_{10})$ di y determinano le f_r, $r = 1, \cdots, 5$ a meno della potenza r–esima di uno stesso fattore. Se ad esempio $y_1 \neq 0$ (e quindi $f_1 \neq 0$) ciò segue osservando che per le (3)

$$\frac{y_0}{y_1} = \frac{f_5(x)}{f_1^5(x)}, \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{f_2(x)}{f_1^2(x)}, \quad \frac{y_3}{y_1} = \frac{f_3(x)}{f_1^3(x)}, \quad \frac{y_4}{y_1} = \frac{f_4(x)}{f_1^4(x)}.$$

Se $y_1 = 0$, ma ad esempio $y_5 \neq 0$, dividendo opportunamente le forme dell'espressione (3) di f si giunge alla conclusione voluta con facili calcoli. Si procede in modo analogo in tutti gli altri casi.

Dalle (3) per eliminazione delle f_i si ottengono le equazioni:

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad & y_2^5 = y_0 y_1^3 y_5 \;;\; y_2 y_3 = y_1 y_6 \;;\; y_0 y_1^2 y_7 = y_2^3 y_4 \;;\; y_0^2 y_1^2 y_8 = y_3^5 \;; \\
& y_0 y_1 y_9 = y_3^2 y_4 \;;\; y_0^3 y_1 y_{10} = y_4^5 \;;\; y_6^5 = y_0^3 y_5 y_8 \;;\; y_0 y_5 y_9 = y_6^2 y_7 \;; \\
& y_7^5 = y_0 y_5^3 y_{10} \;;\; y_9^5 = y_0^2 y_8^2 y_{10} \,.
\end{aligned}
$$

Sia X la varietà algebrica di $\mathbf{P}^{10}(\mathbf{C})$ definita da queste equazioni e sia X_A la sua « parte affine »: $X_A = X \cap \{y_0 \neq 0\}$. Si verifica che $Y \subseteq X$ ed ovviamente $Y \subseteq X_A$ perché $y_0 \neq 0$ nei punti di Y. Ma di più si ha la

PROPOSIZIONE 3. $Y = X_A$.

Dimostrazione. Si procede in modo non dissimile da quello seguito per provare la Proposizione 2. Sia $y \in X_A$ $y = (y_0, \cdots, y_{10})$. Se ad esempio $y_1 \neq 0$ si considerano le funzioni

$$
g_1 = y_1 \quad , \quad g_2 = y_1 y_2 \quad , \quad g_3 = y_1^2 y_3 \quad , \quad g_4 = y_1^3 y_4 \quad , \quad g_5 = y_1^4 y_0
$$

ed i punti $P \in \mathbf{P}^4(\mathbf{C})$ le cui coordinate $(x_0, \cdots, x_4)$ sono le soluzioni dell'equazione $x^5 + g_1 x^4 + g_2 x^3 + g_3 x^2 + g_4 x + g_5 = 0$. Per ipotesi $g_5 \neq 0$ e quindi $P \in \mathbf{P}^4(\mathbf{C}) \setminus H$. I coefficienti g_i sono le funzioni simmetriche elementari f_i di $x_0, \cdots, x_4$. Quindi

$$
\frac{y_0}{y_1} = \frac{f_5(x)}{f_1^5(x)} \quad , \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{f_2(x)}{f_1^2(x)} \quad , \quad \frac{y_3}{y_1} = \frac{f_3(x)}{f_1^3(x)} \quad , \quad \frac{y_4}{y_1} = \frac{f_4(x)}{f_1^4(x)}
$$

e dalle (4) si ottengono anche per i restanti rapporti y_i/y_1 $i = 5, \cdots, 10$ precisamente quelli dati dalle (3); pertanto $y = f(P)$, cioè $y \in Y$. Se $y_1 = 0$, ma ad esempio $y_5 \neq 0$, si procede in modo analogo assegnando alle g_i i valori calcolati per le f_i nello stesso caso $(y_1 = 0, y_5 \neq 0)$ della Proposizione 2. In ogni caso procedendo in tal modo si giunge alla conclusione voluta.

Proviamo infine che

PROPOSIZIONE 4. *La varietà* X_A *è razionale di dimensione* 4.

Dimostrazione. È sufficiente per questo trovare una rappresentazione parametrica di X_A « razionalmente invertibile ». Siano $(z_0, \cdots, z_4)$ coordinate omogenee in $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$, consideriamo l'applicazione razionale h: $\mathbf{P}^4(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^{10}(\mathbf{C})$ data dalle

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad & y_0 = z_0^4 z_1^3 \;;\; y_1 = z_0^3 z_1^4 \;;\; y_2 = z_2 z_0^3 z_1^3 \;;\; y_3 = z_3 z_0^3 z_1^3 \;;\; y_4 = z_4 z_0^3 z_1^3 \;; \\
& y_5 = z_2^5 z_0^2 \;;\; y_6 = z_2 z_3 z_0^3 z_1^2 \;;\; y_7 = z_2^3 z_4 z_0^2 z_1 \;;\; y_8 = z_3^5 z_0 z_1 \;; \\
& y_9 = z_3^2 z_4 z_0^2 z_1^2 \;;\; y_{10} = z_4^5 z_1^2 \,.
\end{aligned}
$$

Tenuto conto delle (4) si riconosce che in $\mathbf{P}^4(\mathbf{C}) \setminus \{z_0 z_1 = 0\}$, ove h è definita, $\operatorname{Im} h \subseteq X_A$. Inoltre dalle (5) segue che ove $y_1 \neq 0$ e $z_1 \neq 0$ sono uguali i rapporti $\frac{y_i}{y_1} = \frac{z_i}{z_1}$ $i = 0, 2, 3, 4$. Resta quindi definita l'applicazione inversa della h in $X_A \setminus \{y_1 = 0\}$ che è un aperto denso di X_A isomorfo a $\mathbf{P}^4(\mathbf{C}) \setminus \{z_0 z_1 = 0\}$ per mezzo dell'applicazione h^{-1}. Dalla razionalità di X_A segue che X_A è di dimensione 4.

BIBLIOGRAFIA

[1] I. R. SHAFAREVICH (1974) – *Basic algebraic geometry*, Springer Verlag. Die Grundleheren der Math. Wissenschaften. Band 213. Berlin–Heidelberg–New York.

[2] B. SEGRE (1942) – *The nonsingular cubic surfaces*. Oxford University Press (Clarendon Press).