ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

DOMENICO CANDELORO, PATRIZIA PUCCI

Un criterio di compattezza debole alla Dunford-Pettis

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 64 (1978), n.2, p. 124–129.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_2_124_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi funzionale. — *Un criterio di compattezza debole alla Dunford-Pettis.* Nota di DOMENICO CANDELORO e PATRIZIA PUCCI^(*), presentata ^(**) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — In this paper we give a Dunford-Pettis-type weak compactness criterion in $L^1(S)$, where $(S, \mathcal{M}, \mu)$ is a σ -finite measure space.

INTRODUZIONE

Il problema di determinare condizioni equivalenti alla compattezza debole in L^1 ha ispirato numerosi lavori in molti campi di ricerca. In particolare L. Cesari e M. B. Suryanarayana [2], utilizzano un risultato ottenuto in questo ordine di idee (cfr. [5]) e noi stessi ci occupiamo qui del problema in vista di un nuovo teorema di chiusura inferiore [1].

In questo lavoro prendiamo in considerazione vari risultati, più o meno noti in letteratura, estendendoli a situazioni generali (spazi di misura astratti: misure finite e σ -finite, con o senza atomi).

Le tecniche da noi adoperate sono elementari e forniscono tra l'altro una costruzione diretta di una funzione di Nagumo molto regolare.

Nel § 1 abbiamo stabilito alcune equivalenze preliminari che abbiamo utilizzato nel § 2 per fornire una rapida dimostrazione dei teoremi oggetto di questo lavoro.

§ 1. ALCUNE PROPRIETÀ IN $L^1(S)$

In tutto il lavoro indicheremo con $(S, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura dove μ è non negativa e con $\mathcal{U}$ un sottoinsieme di $L^1(S)$.

LEMMA 1.1. *Supponiamo che siano verificate le seguenti condizioni:*

$$(i) \quad \sup_{u \in \mathcal{U}} \int_S |u(s)| d\mu(s) = M < +\infty,$$

(ii) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che*

$$\int_B |u(s)| d\mu(s) \leq \varepsilon, \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{U}$$

e per ogni $B \in \mathcal{M}$ con $\mu(B) \leq \delta$.

(*) Istituto Matematico dell'Università di Perugia. Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. - C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1978.

Allora si ha

(a) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\int_{\{s \in S: |u(s)| \geq \lambda\}} |u(s)| d\mu(s) \leq \varepsilon, \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{U};$$

(b) esiste una funzione $\Phi: \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ convessa e crescente tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty \text{ e inoltre}$$

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \int_S \Phi \circ |u|(s) d\mu(s) = L < +\infty.$$

Dimostrazione. (a) Fissiamo $\varepsilon > 0$. In corrispondenza sia $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ relativo alla (ii). Sia ora $\lambda > 0$ tale che $M/\lambda \leq \delta$. Allora risulta

$$M \geq \int_{\{s \in S: |u(s)| \geq \lambda\}} |u(s)| d\mu(s) \geq \lambda \cdot \mu(\{s \in S: |u(s)| \geq \lambda\}),$$

per ogni $u \in \mathcal{U}$, da cui

$$\mu(\{s \in S: |u(s)| \geq \lambda\}) \leq \frac{M}{\lambda} \leq \delta, \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{U}.$$

(b) Sia $k = 1, 2, \dots$. Per (a) esiste una successione $(\lambda_k)_k$ con $\lambda_k/\lambda_{k-1} > 2$ per $k = 2, 3, \dots$ e

$$\int_{\{s \in S: |u(s)| \geq \lambda_k\}} |u(s)| d\mu(s) \leq 1/2^k, \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{U}.$$

Definiamo $\Phi: \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ con la seguente legge:

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{per } t = 0 \\ k \cdot \lambda_k & , \quad \text{per } t = \lambda_k \text{ e } k = 1, 2, \dots \\ \text{lineare,} & \text{altrove.} \end{cases}$$

Ovviamente Φ è crescente; inoltre, detta h_k la pendenza di Φ per $\lambda_k \leq t < \lambda_{k+1}$, risulta $k < h_k < k + 2$ e $h_k < h_{k+1}$ per $k = 1, 2, \dots$. Pertanto Φ è convessa e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$.

Sia $u \in \mathcal{U}$; allora

$$\begin{aligned} \int_S \Phi \circ |u|(s) d\mu(s) &\leq \lambda_1 \cdot M + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\{s \in S: \lambda_k \leq |u(s)| \leq \lambda_{k+1}\}} \Phi(|u(s)|) d\mu(s) < \\ &< \lambda_1 \cdot M + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\{s \in S: \lambda_k \leq |u(s)| \leq \lambda_{k+1}\}} h_k \cdot |u(s)| d\mu(s) < \lambda_1 \cdot M + \sum_{k=1}^{+\infty} (k+2)/2^k < +\infty. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE. Nel Lemma 1.1 abbiamo provato la condizione (b) costruendo esplicitamente una funzione Φ . È facile controllare che risulta

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \int_S \Phi \circ \Phi \circ |u|(s) d\mu(s) < +\infty.$$

Infatti fissato $u \in \mathcal{U}$ si ha

$$\begin{aligned} \int_S \Phi \circ \Phi \circ |u|(s) d\mu(s) &\leq \lambda_1 \cdot M + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\{s \in S: |u(s)| \geq \lambda_k\}} h_{2k-1} \cdot h_k \cdot |u(s)| d\mu(s) < \\ &< \lambda_1 \cdot M + \sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1)(k+2)/2^k < +\infty, \end{aligned}$$

essendo $\lambda_k < h_k \cdot |u(s)| < \lambda_{2k}$ quando $\lambda_k \leq |u(s)| \leq \lambda_{k+1}$.

LEMMA 1.2 (b) *implica* (a).

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo $k > 0$ tale che $L/k \leq \varepsilon$. Esiste allora $\lambda > 0$ tale che $\Phi(t) \geq kt$ per ogni $t \geq \lambda$.

Quindi per ogni $u \in \mathcal{U}$ risulta:

$$k \cdot \int_{\{s \in S: |u(s)| \geq \lambda\}} |u(s)| d\mu(s) \leq \int_{\{s \in S: |u(s)| \geq \lambda\}} \Phi(|u(s)|) d\mu(s) \leq L.$$

Dividendo per k si ottiene la relazione cercata.

LEMMA 1.3. (a) *implica* (ii) (e quindi (b) *implica* (ii)).

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. In corrispondenza a $\varepsilon/2$ per la condizione (a) esiste $\lambda = \lambda(\varepsilon/2) > 0$ tale che per ogni $u \in \mathcal{U}$ e per ogni $B \in \mathcal{M}$ risulta,

$$\int_B |u(s)| d\mu(s) = \int_{\{s \in B: |u(s)| < \lambda\}} |u(s)| d\mu(s) + \int_{\{s \in B: |u(s)| \geq \lambda\}} |u(s)| d\mu(s) \leq \varepsilon/2 + \lambda \cdot \mu(B).$$

Scegliendo $\delta = \varepsilon/2 \lambda$ segue immediatamente l'asserto.

LEMMA 1.4. Sia $(S, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura finito. Allora (a) *implica* (i).

Dimostrazione. Sia $\lambda = \lambda(1) > 0$ di cui alla (a). Allora per ogni $u \in \mathcal{U}$ si ha

$$\int_S |u(s)| d\mu(s) \leq \int_{\{s \in S: |u(s)| \geq \lambda\}} |u(s)| d\mu(s) + \lambda \cdot \mu(S) \leq 1 + \lambda \cdot \mu(S).$$

D'ora in poi utilizzeremo, se necessario, il seguente accorgimento: date due condizioni (x) e (y) indicheremo con $(x) \wedge (y)$ la condizione risultante dal verificarsi simultaneo di (x) e (y).

TEOREMA 1.5. Supponiamo $\mu(S) < +\infty$. Allora, posto $(c) = (i) \wedge (ii)$, le condizioni (a), (b) e (c) sono equivalenti.

Dimostrazione. L'asserto segue dai Lemmi 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4.

COROLLARIO 1.6. *Se μ è una misura finita e non atomica, allora le condizioni (ii), (a) e (b) sono equivalenti.*

Dimostrazione. Basta provare che (ii) implica (i).

Per la condizione (ii) esiste $\delta = \delta(1) > 0$ tale che

$$\int_B |u(s)| d\mu(s) \leq 1, \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{U}$$

e per ogni $B \in \mathcal{M}$ con $\mu(B) \leq \delta$.

Per il Lemma 2 di [6] è possibile trovare un numero finito n di insiemi $B_i \in \mathcal{M}$ a due a due disgiunti con $\mu(B_i) \leq \delta$ tali che $\bigcup_{i=1}^n B_i = S$.

Quindi per ogni $u \in \mathcal{U}$ risulta:

$$\int_S |u(s)| d\mu(s) \leq \sum_{i=1}^n \int_{B_i} |u(s)| d\mu(s) \leq n.$$

DEFINIZIONE 1.7. Sia $(S, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ -finito. Chiameremo *decomposizione* di S ogni successione $(S_n)_n$ di elementi di $\mathcal{M}$ a due a due disgiunti tali che $\mu(S_n) < +\infty$ e $\bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n = S$.

LEMMA 1.8. *Sia $(S, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ -finito. Supponiamo che valga la condizione (a) e inoltre:*

(iii) *per ogni decomposizione $(S_n)_n$ di S risulta*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \int_{S_n} |u(s)| d\mu(s) = 0$$

uniformemente rispetto a $u \in \mathcal{U}$.

Allora sussiste la condizione (c).

Dimostrazione. Per il Lemma 1.3 è sufficiente provare la condizione (i).

Fissiamo una decomposizione $(S_n)_n$ di S ; per (iii) esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$\int_S |u(s)| d\mu(s) \leq \sum_{i=1}^n \int_{S_i} |u(s)| d\mu(s) + 1, \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{U}.$$

Ma poiché

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \sum_{i=1}^n \int_{S_i} |u(s)| d\mu(s) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \int_{\bigcup_{i=1}^n S_i} |u(s)| d\mu(s)$$

si ha l'asserto in virtù del Lemma 1.4.

TEOREMA 1.9. *Sia $(S, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ -finito. Allora le condizioni $(a_1) = (a) \wedge (iii)$, $(b_1) = (b) \wedge (iii)$ e $(c_1) = (c) \wedge (iii)$ sono equivalenti.*

Dimostrazione. L'asserto segue dai Lemmi 1.1, 1.2, 1.3 e 1.7.

COROLLARIO 1.10. *Sia μ una misura σ -finita e non atomica. Sono equivalenti le condizioni (a_1) , (b_1) e (d) , avendo posto $(d) = (ii) \wedge (iii)$.*

Dimostrazione. Basta provare che (d) implica (i).

Sia $(S_n)_n$ una decomposizione di S . In virt della (iii) esiste $\bar{n} \in \mathbf{N}$ tale che

$$\sum_{n=\bar{n}}^{+\infty} \int_{S_n} |u(s)| d\mu(s) \leq 1, \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{U}.$$

Quindi per il Corollario 1.6 segue che

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \int_S |u(s)| d\mu(s) < +\infty.$$

§ 2. TEOREMI DI COMPATTEZZA DEBOLE IN $L^1(S)$

Utilizzeremo i risultati ottenuti nel paragrafo precedente e il criterio di compattezza debole di Dunford e Pettis [3] per dedurre teoremi che arricchiscono quest'ultimo sia nel caso finito che in quello σ -finito.

TEOREMA 2.1. *Sia $(S, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura finito e sia $\mathcal{U} \subset L^1(S)$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(*) $\mathcal{U}$ debolmente precompatto;

(a) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\int_{\{s \in S: |u(s)| \geq \lambda\}} |u(s)| d\mu(s) \leq \varepsilon, \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{U};$$

(b') esiste una funzione $\Phi: \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ convessa e crescente tale che

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$ e inoltre l'insieme $\{\Phi(|u|): u \in \mathcal{U}\} \subset L^1(S)$ debolmente precompatto;

(c)
$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \int_S |u(s)| d\mu(s) < +\infty$$

e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\int_B |u(s)| d\mu(s) \leq \varepsilon, \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{U}$$

e per ogni $B \in \mathcal{M}$ con $\mu(B) \leq \delta$.

Dimostrazione. L'equivalenza tra le condizioni (a), (b') e (c) discende dal Teorema 1.5 e dall'Osservazione del § 1. Mentre l'equivalenza di (c) con (*) è assicurata dal teorema di Dunford e Pettis ([3], [4]).

TEOREMA 2.2. *Sia $(S, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura non atomico e finito e sia $\mathcal{U} \subset L^1(S)$. Allora si ha lo stesso asserto del Teorema 2.1 ove si riduca la condizione (c) alla (ii).*

Dimostrazione. Immediata.

TEOREMA 2.3. *Sia $(S, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ -finito e sia $\mathcal{U} \subset L^1(S)$. Allora le condizioni (*), (a₁), (b'₁) e (c₁) sono equivalenti, dove (b'₁) = (b') $\wedge$ (iii).*

Dimostrazione. L'asserto segue dal Teorema 1.9, dall'Osservazione del § 1 e dal Teorema di Dunford e Pettis ([3], [4]).

TEOREMA 2.4. *Sia $(S, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ -finito e non atomico e sia $\mathcal{U} \subset L^1(S)$. Allora le condizioni (*), (a₁), (b'₁) e (d) sono equivalenti.*

Dimostrazione. Immediata.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. CANDELORO e P. PUCCI - *Un teorema di chiusura inferiore rispetto a una successione di misure per problemi di Controllo Ottimo*, in corso di stampa in «Atti Sem. mat. fis., Univ. Modena».
- [2] L. CESARI e M. B. SURYANARAYANA - *An existence theorem for Pareto problems* in corso di stampa. In applicable mathematics.
- [3] N. DUNFORD e B. J. PETTIS (1940) - *Linear Operations on summable functions* «Trans. Amer. Math. Soc.», 47, 323-392.
- [4] R. E. EDWARDS (1965) - *Functional Analysis. Theory and Applications*. Holt, Rinehart and Winston, New York.
- [5] I. EKELAND e R. TEMAM (1974) - *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*. Dunod, Paris.
- [6] P. R. HALMOS (1947) - *On the set of values of a finite measure*, «Bull. Amer. Math. Soc.», 53, 138-141.