Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Philippe Paclet

Formes de Dirichlet non symétriques et contractions normales

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.2, p. 118–123.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_2_118_0>

Analisi matematica. — *Formes de Dirichlet non symétriques et contractions normales.* Nota di PHILIPPE PACLET, presentata (*) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

RIASSUNTO. — Si considera uno spazio di Hilbert reale H continuamente immerso in $L^2(X, m)$ dove (X, m) è uno spazio misurato qualunque. Sia a una forma bilineare continua coercitiva su H; son provati i due teoremi seguenti: se a è una forma di *Dirichlet*, allora tutte le contrazioni reali convesse su $\mathbf{R}^-$, concave su $\mathbf{R}^+$ *operano* su a (cfr. [1] e [4] per le definizioni); se di più, la forma trasposta $\hat{a}$ è, anch'essa di Dirichlet, allora tutte le contrazioni operano su a (ed $\hat{a}$).

INTRODUCTION

Soit H un espace de Hilbert réel s'injectant continument dans $L^2(X, m)$ où (X, m) est un espace mesuré quelconque.

Soit a une forme bilinéaire, continue, coercitive sur H

$$\{\exists c, k > 0 : \forall u \in H \; c\|u\|_H^2 \leq a(u, u) \leq k\|u\|_H^2\}.$$

Soit T une contraction normale c.a.d.

$$T : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ t.q. } T(0) = 0 \text{ et } |T(x) - T(y)| \leq |x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Suivant la définition de Ito (cf. 4) on dit que T *opère sur* a si et seulement si

$$\text{(D)} \qquad \forall u \in H \; Tu \in H \quad \text{et} \quad a(u + Tu, u - Tu) \geq 0$$

où Tu désigne la composition des deux fonctions T et u. Si T_0^1 opère sur a on dit que a est une *forme de Dirichlet* où T_0^1 désigne la troncature à 0 et 1

$$T_0^1(x) = \sup\{\inf(x, 1), 0\} \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

A. Beurling et J. Deny (cf. 3) ont prouvé que toutes les contractions normales opèrent sur une forme de Dirichlet symétrique.

Dans [1] A. Ancona propose une démonstration élémentaire de ce résultat et l'on peut remarquer que sa preuve fonctionne aussi bien quand on fait l'hypothèse « duale » que la forme transposée $\hat{a}$ $[\hat{a}(u, v) = a(v, u) \; \forall u, v \in H]$ est elle aussi de Dirichlet. Ici on adapte cette démonstration pour prouver le

THÉORÈME 1. *Si a est une forme de Dirichlet toutes les contractions convexes sur* $\mathbf{R}^-$, *concaves sur* $\mathbf{R}^+$ *opèrent sur a.*

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1978.

Puis on fait voir comment déduire facilement, du Théorème 1 le résultat cité plus haut:

THÉORÈME 2. *Si a et $\hat{a}$ sont des formes de Dirichlet alors toutes les contractions opèrent sur a (et $\hat{a}$).*

NOTATIONS ET REMARQUES

– pour $a \leq 0 \leq b \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ on pose

$$T_a^b(x) = \sup\{\inf(x, b), a\}$$

$$\text{en particulier}\quad \begin{aligned} T_0^{+\infty} &= P &&\text{partie positive}\\ T_{-\infty}^0 &= N &&\text{partie négative}\\ A &= P - N &&\text{valeur absolue.}\end{aligned}$$

et pour $0 \leq a \leq b$

$$T_a^b(x) = T_0^b - T_0^a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ x - a & \text{si } a \leq x \leq b \\ b - a & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

– la condition

$$(\mathrm{D}')\qquad \forall u \in H\ Tu \in H \quad \text{et} \quad a(Tu, u - Tu) \geq 0$$

est plus forte que (D).

– Si C_D [resp. $C_{D'}$] désigne l'ensemble des contractions vérifiant l'hypothèse (D) [resp. (D')], on voit facilement que C_D [resp. $C_{D'}$] est un convexe.

En effet si $T_1, T_2 \in C_D$ [resp. $C_{D'}$] et $0 \leq t \leq 1$, en développant $a(u + tT_1 u + (1-t)T_2 u, u - T_1 u - (1-t)T_2 u)$ [resp. $a(tT_1 u + (1-t)T_2 u, u - tT_1 - u(1-t)T_2 u)$] suivant les puissances de t, on aboutit sur une polynome $P(t)$ du 2^{nd} degré dont le coefficient en t^2 est négatif.

On rappelle un certain nombre de Lemmes connus.

LEMME 3. Cf. (1). *Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in H$, $u \in L^2(X, m)$, $M \in \mathbf{R}^+$ tels que*

$$u_n \to u \quad m \quad \text{p.p.}$$
$$\|u_n\|_H \leq M \quad \forall n$$

alors $u \in H$ et $u_n \to u$ faiblement dans H.

LEMME 4. *Il existe une constante* K *ne dépendant que de c, k telle que pour toute $T \in C_D$ et pour tout $u \in H$*

$$\|T \circ u\|_H \leq K \|u\|_H .$$

Preuve: cela résulte de l'inégalité

$$c\|T \circ u\|_H^2 \leq a(Tu, Tu) \leq a(u, u) + a(Tu, u) - a(u, Tu) \leq$$
$$\leq k(\|u\|_H^2 + 2\|Tu\|_H \|u\|_H).$$

LEMME 5. Cf. (2). *Si a est une forme de Dirichlet*

α) T_0^λ *opère pour tout* $\lambda \geq 0$

T_λ^0 *opère pour tout* $\lambda \leq 0$

β) P *opère*

γ) N *opère*

δ) A *opère.*

LEMME 6. Cf. (3). *Si a est une forme de Dirichlet*

α) $a(u, v) \geq 0$ *chaque fois que* $u, v \in H$; $u, v \geq 0$ m p.p.; $u \leq \lambda$ m p.p. *et* $u = \lambda$ m p.p. *sur* $\{v \neq 0\}$.

β) $a(u, v) \leq 0$ *chaque fois que* $u, v \in H$ et $\inf(u, v) = 0$ m p.p.

COROLLAIRE 7. *Si* $(T_n)_{n \in N} \in C_D$ [resp. $C_{D'}$] *converge simplement à une contraction normale* T, *alors* $T \in C_D$ [resp. $C_{D'}$].

Preuve: pour $u \in H$ on a alors

$$T_n u \to Tu \quad m \quad \text{p.p.}$$

$$\|T_n u\|_H \leq K \|u\|_H \qquad \text{(Lemme 4)}.$$

D'où (Lemme 3) $Tu \in H$. Enfin on conclut en utilisant la semi continuité inférieure faible de la forme a.

COROLLAIRE 8. *Si a est une forme de Dirichlet on a pour tout* $u \in H$

$$a(T_0^1 u, u - T_0^1 u) \geq 0,$$

autrement dit pout T_0^1 *la condition* (D) *est équivalente à* (D').

Preuve: $a(T_0^1 u, u - T_0^1 u) =$

$$a(T_0^1 \circ Pu, Pu - T_0^1 \circ Pu) + a(T_0^1 \circ Pu, Nu) \geq 0$$

car $T_0^1 \circ Pu$ et $Pu - T_0^1 \circ Pu$ vérifient les conditions du lemme 6 α); $T_0^1 \circ Pu$, $-Nu$ celles du Lemme 6 β).

COROLLAIRE 9. *Il suffit, pour prouver le Théorème* 1, *de ne considérer que des contractions normales nulles sur* $\mathbf{R}^-$.

Preuve: en effet si le Théorème 1 est vrai pour de telles contractions, il l'est aussi pour des contractions nulles sur $\mathbf{R}^+$ (poser $\tilde{S}(x) = -S(-x)$). Si, maintenant, R est quelconque, on décompose R de la façon suivante:

$$R = R \circ P + R \circ N$$

et il vient que

$$
\begin{aligned}
a(u + \mathrm{R}u\,,\, u - \mathrm{R}u) = {} & a(\mathrm{P}u + \mathrm{R}\circ\mathrm{P}(\mathrm{P}u)\,,\, \mathrm{P}u - \mathrm{R}\circ\mathrm{P}(\mathrm{P}u)) \\
& + a(\mathrm{N}u + \mathrm{R}\circ\mathrm{N}(\mathrm{N}u)\,,\, \mathrm{N}u - \mathrm{R}\circ\mathrm{N}(\mathrm{N}u) \\
& + a(\mathrm{P}u + \mathrm{R}\circ\mathrm{P}u\,,\, \mathrm{N}u - \mathrm{R}\circ\mathrm{N}u) + \\
& + a(\mathrm{N}u + \mathrm{R}\circ\mathrm{N}u\,,\, \mathrm{P}u - \mathrm{R}\circ\mathrm{P}u)
\end{aligned}
$$

et l'on s'assure de la positivité des deux derniers termes à l'aide du Lemme 6 β).

On peut passer à la démonstration du Théorème 1 et l'on considère un premier cas:

A. T *est concave croissante su* $\mathbf{R}^+$.

Vu la remarque du début, les Corollaires 7 et 8 on prouvera qu'un telle $\mathrm{T} \in \mathrm{C}_{\mathrm{D}'}$ si l'on réussit à l'approcher simplement par des combinaisons linéaires convexes de T_0^λ $(\lambda \in \mathrm{R}^+ \cup \{+\infty\})$. On peut utiliser comme fonctions approximantes des fonctions linéaires par morceaux du type

$$
\mathrm{T}(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, \mathrm{T}_{a_i}^{a_{i+1}}(x)
$$

où

$$
0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} = +\infty \qquad \text{par convention et}
$$

$$
1 \geq \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\,.
$$

Que l'on peut réecrire sous la forme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T} &= (1 - \lambda_0) \times 0 + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (\mathrm{T}_0^{a_{i+1}} - \mathrm{T}_0^{a_i}) \\
&= (1 - \lambda_0) \times 0 + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_{i-1} - \lambda_i)\, \mathrm{T}_0^{a_i} + \lambda_n \mathrm{P}
\end{aligned}
$$

qui est de la forme cherchée.

Pour traiter le cas général, on a besoin du Lemme technique suivant.

LEMME 10. *Soit* S_1 *concave croissante*, S_2 *croissante telle que* $\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2$ *soit convexe croissante alors*

$$
a(\mathrm{S}_1 u\,,\, \mathrm{S}_2 u) \geq 0 \qquad \forall u \in \mathrm{H}.
$$

Preuve. Si S_1 et S_2 sont comme dans l'hypothèse on peut trouver R contraction croissante, concave telle que

$$
\mathrm{S}_1 = \mathrm{R} \circ (\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2)\,.
$$

En effet posons

$$M = \sup_x (S_1 + S_2)\, x$$

$$M_1 = \sup_x S_1(x)$$

$$M , M_1 \in \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\} .$$

Si $0 < x < M$ $y \in \mathbf{R}^+ (S_1 + S_2)\, y = x$ et il est unique à cause de la croissance de S_1 et S_2. On pose dans ce cas $Rx = S_1 y$. Si $x \geq M$ (ou $x \leq 0$) on pose $R(x) = M_1$ (ou $R(x) = 0$); il est facile de vérifier R est une contraction croissante; quant à la concavité il suffit de l'envisager sur $]0 , M[$. Si $x_1 , x_2 \in]0 , M[$ et $y_1 , y_2 \in \mathbf{R}^+$ tels que

$$S_1 + S_2 (y_i) = x_i \qquad i = 1 , 2,$$

la convexité de $S_1 + S_2$, la concavité de S_1 et la croissance de $\mathbf{R}$ donnent que

$$\begin{aligned} R\{(1-t)\, x_1 + tx_2\} &\geq R \circ (S_1 + S_2)\{(1-t)\, y_1 + ty_2\} = S_1\{(1-t)\, y_1 + ty_2\} \\ &\geq (1-t)\, S_1(y_1) + tS_1(y_2) = (1-t)\, Rx_1 + tRx_2 . \end{aligned}$$

On applique alors la partie A à R et à $S_1 + S_2(u)$.

B. *Cas général.*

On décompose T en la somme de

T_1 (concave croissante) et T_2 (concave décroissante) et si $u \in H$

$$\begin{aligned} a(u + Tu , u - Tu) &= a(T_1 u , u - T_1 u) + a(T_1 u , -T_2 u) \\ &\quad + a(u + T_2 u , u - T_1 u - T_2 u) \geq 0 \end{aligned}$$

car

- d'après A) le 1^{er} terme est ≥ 0
- d'après le Lemme 6 α) le second est ≥ 0
- d'après le Lemme 10 le troisième est ≥ 0.

Ce qui termine la démonstration du Théorème 1.

Un contrexemple $H = \mathbf{R}^2 = L^2(X , m)$ où $X = \{1 , 2\}$ $m = \delta_1 + \delta_2$.

Dans (2) il est prouvé que la forme $a(u , v) = 2\, u_1 v_1 + 4\, u_2 v_2 + 3\, u_1 v_2$ est une forme de Dirichlet (sans que $\hat{a}$ le soit).

Alors T_1^5 (qui n'est pas concave) n'opère pas sur a car pour $u = (5 , 1)$

$$a(u + Tu , u - Tu) = -5 .$$

Preuve du Théorème 2. Au contraire du contrexemple précédent, si a et $\hat{a}$ sont des formes de Dirichlet alors T_a^b $(0 \leq a \leq b)$ opère sur a pour tout a et b, car égale à la demi somme d'une contraction concave et d'une contraction convexe (qui opère car son opposée opère sur $\hat{a}$).

$$S = \begin{cases} t & \text{si } t \leq b \\ -t + 2b & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

$$T = \begin{cases} -t & \text{si } t \leq a \\ t - 2a & \text{si } t \geq a . \end{cases}$$

Faisant la même réduction qu'au Théorème 1 on ne considèrera que des contractions nulles sur $\mathbf{R}^-$. Si R est de ce type, on l'approche par $T_n = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i^n T_{a_i^n}^{a_{i+1}^n}$ où

$$0 = a_0^n < a_1^n < \cdots < a_{k+1}^n = +\infty$$

$$|\lambda_i^n| \leq 1 \qquad\qquad i = 0, \cdots, k .$$

Pour prouver que T_n opère on procède par récurrence sur k en s'aidant de la remarque suivante:

Si S opère et $S = c^{te}$ sur $[a, +\infty[$, alors $S + \lambda T_a^b$ opère $(|\lambda| \leq 1)$. En effet

$$\begin{aligned} & a\,(u + Su + \lambda T_a^b u, u - Su - \lambda T_a^b u) = \\ & = a\,(T_{-\infty}^a u + S \circ T_{-\infty}^a u, T_{-\infty}^a u - S \circ T_{-\infty}^a u) + \\ & + a\,(T_a^{+\infty} u + \lambda T_a^b \circ T_a^{+\infty} u, T_a^{+\infty} u - \lambda T_a^b \circ T_a^{+\infty} u) + \\ & + a\,(T_{-\infty}^a u + Su, T_a^{+\infty} u - \lambda T_a^b u) + \\ & + a\,(T_a^{+\infty} u + \lambda T_a^b u, T_{-\infty}^a u - Su) \geq 0 \end{aligned}$$

grace au Lemme 6 appliqué à a et $\hat{a}$.

Je voudrais, pour conclure, addresser tous mes remerciements au Prof. G. Stampacchia pour sa patiente attention, qui m'a aidé à préparer cette Note.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANCONA (1976) – *Continuité des contractions dans les espaces de Dirichlet (exposé au séminaire de theorie du potentiel)*, « Lectures notes », *563*, 1–26.

[2] J. BLIEDTNER (1971) – *Dirichlet forms on regular fonctionnal spaces*, « Lectures notes », *226*.

[3] J. DENY (1970) – *Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel* corso del CIME 1970, 121–201.

[4] M. ITO (1967) – *A note on extended regular fonctionnal spaces*, « Proc. Jap. Acad. », *43*, 435–440.