Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Guglielmo Lunardon

Una classificazione dei piani di traslazione in relazione alle fibrazioni ad essi associate

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.1, p. 59–64.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_1_59_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1978.

Geometria. — *Una classificazione dei piani di traslazione in relazione alle fibrazioni ad essi associate.* Nota II di GUGLIELMO LUNARDON, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — We classify the translation planes of characteristic different from 2 and we exhibit examples of planes of several classes.

3. In questo paragrafo con $\mathscr{F}$ indicheremo sempre una fibrazione dello spazio proiettivo $\Sigma = \Sigma(V/K)$ dove K ha caratteristica diversa da 2.

Se F è il sottocorpo fondamentale del nucleo della congruenza $\mathscr{F}$, si ha che $F \neq GF(2)$; nel seguito esamineremo le seguenti proposizioni:

(**A**) la fibrazione $\mathscr{F}^*(F)$ non ha regoli;

(**B**) $\mathscr{F}^*(F)$ è (A, B, C)-regolare;

(**C**) esistono due fibre A e B per cui $\mathscr{F}^*(F)$ è (A, B)-regolare;

(**D**) $\mathscr{F}^*(F)$ è regolare.

Dicendo che in $\mathscr{F}$ vale la proposizione (**J**) con $\mathbf{J} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ intenderemo che vale (**J**) ma non la successiva. È immediato che in una fibrazione vale una ed una sola delle proposizioni enunciate.

OSSERVAZIONE. Per poter classificare nello stesso modo i piani di traslazione tali che il nucleo di $\mathscr{F}^*$ ha caratteristica 2, si può a prima vista pensare di poter utilizzare la seguente definizione.

Data una congruenza $\mathscr{S}$ esamineremo le seguenti proposizioni per un sottocorpo K del nucleo di $\mathscr{S}$:

(A) la fibrazione $\mathscr{S}(K)$ non ha regoli;

(B) $\mathscr{S}(K)$ è (A, B, C)-regolare;

(C) esistono due fibre A e B per cui $\mathscr{S}(K)$ è (A, B)-regolare;

(D) $\mathscr{S}(K)$ è regolare.

Un sottocorpo K del nucleo N della congruenza $\mathscr{S}$ si dirà *ottimale* se $K \neq GF(2)$ e per ogni sottocorpo F' di N diverso da $GF(2)$ se in $\mathscr{S}(F')$ vale (J) con $J \in \{A, B, C, D\}$ allora (J) vale anche in $\mathscr{S}(K)$.

Ciò però non si può fare poiché esistono delle congruenze il cui nucleo N è privo di sottocorpi ottimali; un esempio di una tale congruenza si può ottenere mediante i semicorpi di Knuth come segue.

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1978.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $K = GF(q^2)$ con $q > 2$ e sia $1, \lambda$ una base di V su K. Sia σ l'automorfismo di K che a x associa x^q, ed f un elemento di K tale che $x^{q+1} - f \neq 0$ per ogni x di K. Se si definisce una moltiplicazione su V ponendo

$$(a + b\lambda)(c + d\lambda) = (ac + b\sigma\, df) + (bc + a\sigma\, d)\lambda$$

allora $\mathscr{U} = (V; +, \cdot)$ è un semicorpo tale che $N = N_c = K$ dove N ed N_c sono rispettivamente il nocciolo e il nucleo centrale di $\mathscr{U}$ (si veda [12]). Inoltre il centro di $\mathscr{U}$ è l'insieme $Z = \{x \in K : x\sigma = x\} = GF(q)$; di conseguenza $\mathscr{F}(\mathscr{U}; K)$ non è (A, B)-regolare comunque si scelgano le fibre A e B fra loro distinte mentre $\mathscr{F}(\mathscr{U}; Z)$ è J (∞)-regolare.

TEOREMA 3. *Se in* $\mathscr{F}$ *vale* (**A**), *è verificata una delle seguenti condizioni*:

f) *se* $\mathscr{U}$ *è un quasicorpo che* (A, B, C)*-coordinatizza* $\mathscr{F}^*(F)$, *in* $\mathscr{U}$ *non vale la proprietà di semplificazione per gli inversi a destra*;

g) *esiste una quasicorpo* $\mathscr{U}$, *che* (A, B, C)*-coordinatizza* $\mathscr{F}^*(F)$ *ed è tale che vale la relazione* $(ab)\, b^{-1} = a$;

h) *esistono due fibre* A *e* B *di* $\mathscr{F}$ *tale che* $\mathscr{F}^*(F)$ *è* (A, B, C)*-coordinatizzata da un quasicorpo di Bol*;

i) *esiste un quasicorpo associativo non normalizzato che* (A, B, C)*-coordinatizza* $\mathscr{F}$.

Dimostrazione. Se $\mathscr{U}$ è un quasicorpo che (A, B, C)-coordinatizza $\mathscr{F}^*(F)$ ed F_1 un sottocorpo di $\mathscr{U}$, si ha che F è contenuto in F_1.

Siano N_c e Z rispettivamente il nucleo centrale e il centro di $\mathscr{U}$. Se $\mathscr{U}$ è un semicorpo, $N_c \cap Z$ è un corpo e quindi F è contenuto in N_c e in Z; pertanto $\mathscr{F}^*(F)$ è (A, B)-regolare. Se $\mathscr{U}$ è un quasicorpo associativo normalizzato, F è contenuto in Z ed $N_c = Q$; di conseguenza $\mathscr{F}^*(F)$ è (A, B)-regolare. Quindi $\mathscr{U}$ è un quasicorpo proprio tale che F non è contenuto in Z o un quasicorpo associativo non normalizzato; vale di conseguenza una delle condizioni enunciate.

TEOREMA 4. *Se in* $\mathscr{F}$ *vale* (**B**), *è verificata una delle seguenti condizioni*:

l) *se* $\mathscr{F}^*(F)$ *è* (A, B, C)*-regolare e* $\mathscr{U}$ *è un quasicorpo che* (A, B, C)*-coordinatizza* $\mathscr{F}^*(F)$, *si ha che* $\mathscr{U}$ *non gode della proprietà di semplificazione per gli inversi a destra*;

m) *esiste una quasicorpo* $\mathscr{U}$, *che* (A, B, C)*-coordinatizza* $\mathscr{F}^*(F)$ *e che gode della proprietà di semplificazione per gli inversi a destra, il cui centro contiene* F;

n) *esistono tre elementi* A, B, C *di* $\mathscr{F}$ *tali che* $\mathscr{F}^*(F)$ *è* (A, B, C)*-regolare ed* $\mathscr{F}^*(F)$ *è* (A, B, C)*-coordinatizzata da un quasicorpo di Bol.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{R} = \mathscr{R}(A, B, C)$ un regolo di $\mathscr{F}^*(F)$; se $\mathscr{U}$ è un quasicorpo che (A, B, C)-coordinatizza $\mathscr{F}^*(F)$, il centro di $\mathscr{U}$ contiene F.

Se $\mathcal{U}$ è associativo segue che $\mathcal{F}^*(F)$ è (A, B)–regolare. Analogamente poiché il nucleo centrale di un semicorpo è un corpo, segue che $\mathcal{U}$ non può essere un quasicorpo distributivo perché in caso contrario $\mathcal{F}^*(F)$ sarebbe A–regolare. Quindi è verificata una delle condizioni enunciate.

TEOREMA 5. *Se in $\mathcal{F}$ vale* (**C**) *è verificata una delle seguenti condizioni*:

o) *se $\mathcal{F}^*(F)$ è (A, B, C)–coordinatizzata dal quasicorpo $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}^*(F)$ è (A, B)–regolare, in $\mathcal{U}$ non vale la proprietà di semplificazione per gli inversi a destra*;

p) *esiste un quasicorpo $\mathcal{U}$, in cui vale la relazione $(ab)\,b^{-1} = a$, che coordinatizza $\mathcal{F}^*(F)$ ed è tale che F è contenuto nel centro e nel nucleo centrale di $\mathcal{U}$*;

q) *esistono due elementi A, B di $\mathcal{F}$ per cui $\mathcal{F}^*(F)$ è (A, B)–regolare ed è (A, B, C)–coordinatizzata da un quasicorpo di Bol*;

r) *$\mathcal{F}^*(F)$ è A–regolare*;

s) *esiste un quasicorpo associativo normalizzato $\mathcal{U}$ che (A, B)–coordinatizza $\mathcal{F}^*(F)$.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{F}^*(F)$ è (A, B)–regolare e $\mathcal{U} = (Q\,;+,\cdot)$ è un quasicorpo che (A, B, C)–coordinatizza $\mathcal{F}^*(F)$, il corpo F è contenuto nel centro e nel nucleo centrale di $\mathcal{U}$. Pertanto $\mathcal{U}$ può essere un quasicorpo proprio, un semicorpo o un quasicorpo associativo normalizzato; di conseguenza è verificata una delle condizioni enunciate.

TEOREMA 6. *Se in $\mathcal{F}$ vale* (**D**) *e $\mathcal{U}$ è un quasicorpo che (A, B, C)–coordinatizza $\mathcal{F}^*(F)$ vale una delle seguenti condizioni*:

t) *$\mathcal{U}$ è un corpo alternativo*;

u) *$\mathcal{U}$ è un corpo*;

v) *$\mathcal{U}$ è un campo.*

Dimostrazione. Si veda [4].

A. Herzer in [9] ha dato un'analoga caratterizzazione mediante proposizioni configurazionali.

4. Se $\mathcal{F}$ è una fibrazione dello spazio proiettivo Σ, il piano affine $\pi(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ si può estendere a un piano proiettivo $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ nel seguente modo. I punti di $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ sono di due tipi: quelli del primo tipo sono i punti di $\pi(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ e quelli del secondo tipo sono gli elementi di $\mathcal{F}$; le rette sono rappresentate o dalle rette di $\pi(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ o da Σ. Il piano $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ è di traslazione rispetto alla retta rappresentata da Σ. Se A è una fibra in seguito indicheremo con $\bar{A}$ il punto rappresentato da A.

PROPOSIZIONE 4. *Sia O un punto fissato di Σ' non incidente con Σ. Se $\mathcal{U}$ è un quasicorpo che (A, B, C)–coordinatizza $\mathcal{F}$ si ha*:

(a) ([6] Teorema 2.1) *esiste un'omologia involutoria di $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ di asse $\langle O, C\rangle$ che muta $\langle O, A\rangle$ in $\langle O, B\rangle$ se e solo se in $\mathcal{U}$ vale la proprietà di semplificazione per gli inversi a destra*;

(b) ([6] Teorema 2.2) *$\mathcal{U}$ è di Bol se e soltanto se per ogni fibra D diversa da A e da B esiste un'omologia involutoria di $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ di asse $\langle O, D\rangle$ che muta $\langle O, A\rangle$ in $\langle O, B\rangle$.*

Mediante i risultati della Proposizione 4 è possibile trovare una condizione geometrica per ognuna delle classi $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$.

5. Diamo ora alcuni esempi di fibrazioni di una delle classi sopra elencate.

Esempio 1. Sia $F = GF(q^n)$ e sia ω un generatore del gruppo moltiplicativo di F. Se σ è l'automorfismo di F che ad x associa x^q, il sottocampo K fissato da σ è tale che $K = GF(q)$. Sia ν la funzione da Z_{q^n-1} a Z_{q-1} definita ponendo $\nu(i) \equiv i \ (mod.\ q - 1)$; se μ è una qualunque funzione da Z_{q-1} a Z_n tale che $\mu(0) = 0$, sia $\lambda = \mu \circ \nu$. Si definisca una legge di moltiplicazione in F ponendo:

$$a \circ b = 0 \qquad \text{se} \quad b = 0$$

$$a \circ b = a\sigma^{\lambda(i)}\, b \qquad \text{se} \quad b = \omega^i .$$

Il sistema $\mathcal{A} = (F\,; +, \cdot)$ è un quasicorpo non distributivo il cui nocciolo è K; se λ non è un omomorfismo da Z_{q^n-1} a Z_n, si ha che $\mathcal{A}$ non è associativo (si veda [1], [8] e [15]).

TEOREMA 7. *Se q è dispari, n è pari e $\mathcal{A}$ non è associativo, la fibrazione $\mathcal{F}(\mathcal{A}\,; K)$ è di classe $j \in \{\boldsymbol{g}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{p}\}$.*

Dimostrazione. Per ogni elemento a del nucleo centrale N_c di $\mathcal{A}$ l'applicazione di F^2 in sè, che ad (x, y) associa (xa, y), determina una $(\overline{J(0)}, \langle O, J(\infty)\rangle)$-omologia di $\mathcal{P}(\mathcal{F})$.

Il gruppo $\langle \omega^{q-1}\rangle$ di ordine $q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1$ è un sottogruppo di N_c; essendo n pari tale è anche $q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1$ e quindi esiste un elemento b di N_c che ha periodo 2 e che determina una $(\overline{J(0)}, \langle O, J(\infty)\rangle)$-omologia involutoria α diversa dall'identità. Se A è una fibra di $\mathcal{F}(\mathcal{A}\,; K)$ diversa da $J(O)$ e da $J(\infty)$, sia B la fibra di $\mathcal{F}$ tale che $A\alpha = B$. È ovvio che $A \neq B$. Se $\mathcal{U}$ è un quasicorpo che $(A, B, J(\infty))$-coordinatizza $\mathcal{F}(\mathcal{A}\,; K)$, per la (a) della Proposizione 4 segue che in $\mathcal{U}$ vale la proprietà di semplificazione per gli inversi a destra. Sia $\mathcal{U}$ di Bol; essendo $\langle \omega^{q-1}\rangle$ un gruppo di ordine maggiore di tre esiste una $(\overline{J(O)}, \langle O, J(\infty)\rangle)$-omologia τ diversa da α e dall'identità; se $\overline{C} = \overline{A}\tau$ il piano $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ è $(B, C, J(\infty))$-coordinatizzato da un quasicorpo di Bol; essendo q dispari il piano sarebbe di Moufang (si veda [11], Teorema 3).

COROLLARIO. *Se $q - 1$ divide n, q è dispari e $\mathcal{A}$ non è associativo, la fibrazione $\mathcal{F}(\mathcal{A}\,; K)$ è di classe $\boldsymbol{p}$.*

Dimostrazione. Se b è un elemento non nullo di K, si ha $b = \omega^h$ dove $h = (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)\, j$; quindi $\nu(h) = 0 = \lambda(h)$. Da qui segue che K è contenuto nel centro e nel nucleo centrale di $\mathcal{A}$.

Esempio 2. Sia d un numero razionale che non sia un quadrato e sia $F = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ dove $\mathbf{Q}$ è il campo dei numeri razionali. Se σ è l'automorfismo di F che all'elemento $a + b\sqrt{d}$ associa $a - b\sqrt{d}$, è ovvio che $\sigma^2 = 1$; sia ν l'applicazione da F a $\mathbf{Q}$ che ad x associa $x(x\sigma)$. Se p è un numero primo fissato e q un numero razionale non nullo, segue che $q = (-1)^{\beta} p^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ dove $p_1, \cdots, p_s$ sono numeri primi, $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ interi non nulli, α un intero e $\beta \in \{0, 1\}$. Sia μ la funzione da $\mathbf{Q}$ a Z_2 definita ponendo

$$\mu(q) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha_i \equiv 0 \pmod{2} \text{ per ogni } i \text{ o } q = 0 \\ \alpha + \Sigma\alpha_i & \text{se esiste un } \alpha_i \text{ dispari.} \end{cases}$$

Se $\lambda = \mu \circ \nu$, si definisca una nuova moltiplicazione in F ponendo

$$a \circ b = a\sigma^{\lambda(b)}\, b\,.$$

La struttura algebrica $\mathscr{U} = (F\,;\, +\,,\, \cdot)$ è un quasicorpo di Bol proprio (cfr. [6]).

Se b è un elemento di $\mathbf{Q}$ si ha $\lambda(b) = 0$ e quindi $\mathbf{Q}$, che è il nocciolo di $\mathscr{U}$, è contenuto nel centro e nel nucleo centrale di $\mathscr{U}$. Pertanto $\mathscr{F}(\mathscr{U}\,;\,\mathbf{Q})$ è di classe ***q***.

Esempio 3. In [18] Walker ha costruito una fibrazione $\mathscr{F}$ di $PG(3, 5)$ che contiene regoli. Però il piano $\mathscr{P}(\mathscr{F})$ non ha omologie il cui centro sia un punto del tipo $\bar{A}$ dove A è una fibra di $\mathscr{F}$. Pertanto $\mathscr{F}$ è di classe ***l*** o di classe ***o***.

6. Esaminiamo brevemente le fibrazioni in cui non vale (**D**).

I quasicorpi associativi finiti sono stati classificati da Zassenhauss (si veda [19] o anche [8], [15] e [17]): esistono quattro quasicorpi associativi non normalizzati. Essi sono i quasicorpi eccezionali del Tipo I, II, V e VI (cfr. [17], p. 64); ogni altro quasicorpo associativo finito è normalizzato. Pertanto esistono fibrazioni di classe ***i*** ed ***s***.

Poiché esistono semicorpi il cui nocciolo ha caratteristica diversa da due (si veda [8], [12] e [15]), esistono fibrazioni di classe ***r***.

Rileviamo esplicitamente che rimane da stabilire l'esistenza di esempi di tipo ***g***, ***h***, ***i***, ***m***, ***n***, e di uno dei due tipi ***l*** od ***o***.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. ANDRÉ (1954) – *Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationgruppe*, «Math. Z.», *60*, 156–180.
[2] A. BARLOTTI (1975) – *Representation and construction of projective planes and other geometric structures from projective spaces*, «Jber. Deutsch. Math. Verein», *77*, 28–38.
[3] R. H. BRUCK e R. C. BOSE (1964) – *The construction of projective planes in projective spaces*, «J. Algebra», *1*, 85–102.
[4] R. H. BRUCK e R. C. BOSE (1966) – *Linear representation of projective planes in projective spaces*, «J. Algebra», *4*, 117–172.

[5] BRUEN A. (1972) – *Spreads and a conjecture of Bruck and Bose*, « J. Algebra », *23*, 519–532.

[6] R. P. BURN (1969) – *Bol quasifield and Pappus' theorem*, «Math. Z.», *105*, 351–364.

[7] J. COFMAN (1964) – *Configurational propositions in projective spaces*. Proc. Conference on foundation of Geometry. Toronto.

[8] P. DEMBOWSKI (1968) – *Finite geometries*, Springer.

[9] A. HERZER (1974) – *Charakterisierung regulärer Faserungen durch Schliessungssätze*, « Arch. Math. », *25*, 662–672.

[10] A. HERZER e G. LUNARDON – *Charakterisierung* (A, B)*-regulärer Faserungen durch Schliessungssätze*. In corso di stampa.

[11] M. J. KALLAHER (1969) – *Projective planes over Bol quasifields*, «Math. Z.», *109*, 53–65.

[12] D. E. KNUTH (1965) – *Finite semifields and projective planes*, « J. Algebra », *2*, 182–217.

[13] G. LUNARDON (1976) – *Proposizioni configurazionali in una classe di fibrazioni*, « Boll. U.M.I. », *13*, 404–413.

[14] T. G. OSTROM (1973) – *Classification of finite translation planes*. In Proc. International Conference on projective spaces. Pullmann Wash., 195–214.

[15] G. PICKERT (1955) – *Projektive Ebenen*. Springer.

[16] B. SEGRE (1964) – *Teoria di Galois, fibrazioni proiettive e geometrie non desarguesiane*, « Ann. Mat. Pura Appl. », *70*, 1–70.

[17] H. WÄHLING (1974) – *Bericht über Fastkörper*, « Jber. Deutsch. Math. Verein », *76*, 41–103.

[18] M. WALKER (1976) – *A class of translation planes*, « Geometriae Dedicata », *5*, 135–146.

[19] H. ZASSENHAUS (1935) – *Über endliche Fastkörper*, « Abh. Mat. Sem. Hamburg », *11*, 187–220.