Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Diego Pigozzi

Su talune proprietà cinematico geometriche dei moti di precessione

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **63** (1977), n.6, p. 518–521.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_6_518_0>

Meccanica. — *Su talune proprietà cinematico geometriche dei moti di precessione.* Nota di DIEGO PIGOZZI, presentata (*) dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — The motion of a rigid body about a fixed point is characterised by a rotation matrix.

Some kinematical and geometric properties of the rotation matrix are put in evidence in correspondence to the precession motions.

1. Sia $\rho(t)$ la matrice di rotazione che trasforma lo spazio solidale alla terna fissa T′ in quello solidale alla terna mobile T avente la stessa origine di T′.

Dimostro che è possibile caratterizzare i moti di precessione della terna T, come quei moti che ammettono per $\rho(t)$ una decomposizione in prodotto del tipo

$$\rho = \rho^c \rho^k \tag{1}$$

essendo $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{k}$ due versori fissi in T′ e ρ^c, ρ^k due rotazioni dipendenti dal tempo e aventi rispettivamente $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{k}$ come assi di rotazione. Si dimostra precisamente l'equivalenza di tale caratterizzazione con quella ben nota che stabilisce che durante il moto esiste un versore solidale a T che forma angolo invariato con un versore fisso in T′.

Sufficienza della condizione. Sia $\rho(t)$ decomponibile a ogni istante nel prodotto (1); allora il vettore $\rho\boldsymbol{k}$ solidale a T è tale che, denotando con $\overline{\rho}$ la trasposta di ρ,

$$\rho\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{c} = \rho^k\boldsymbol{k}\cdot\overline{\rho}^c\boldsymbol{c} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{c} \tag{2}$$

e quindi esso forma angolo costante col versore fisso $\boldsymbol{c}$.

Necessità della condizione. Si supponga

$$\rho\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{c} = \text{costante} \tag{3}$$

e sia ρ^c la rotazione avente $\boldsymbol{c}$ come asse e soddisfacente la condizione

$$\rho^c\boldsymbol{k} = \rho\boldsymbol{k}\,. \tag{4}$$

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1977.

Considerata allora la rotazione ρ^k definita da

$$\rho^k = \overline{\rho}^c \rho \tag{5}$$

ne segue

$$\rho^k \boldsymbol{k} = \overline{\rho}^c \rho^c \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \tag{6}$$

e si conclude che $\boldsymbol{k}$ è asse di rotazione per ρ^k quindi ρ è decomponibile nel prodotto (1).

È evidente che $\boldsymbol{c}$ rappresenta l'asse di precessione e $\rho\boldsymbol{k} = \rho^c \boldsymbol{k}$ l'asse di figura.

2. Un ulteriore modo di caratterizzare i moti di precessione tramite la matrice di rotazione si ha in base al seguente teorema: condizione necessaria e sufficiente affinché la matrice di rotazione $\rho(t)$ definisca un moto di precessione della terna T rispetto alla terna T′ (col terzo asse di T′ come asse di precessione), è che risulti

$$\boldsymbol{\psi} \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} \times \ddot{\boldsymbol{\psi}} = 0 \tag{7}$$

ove $\boldsymbol{\psi}$ è il vettore di componenti

$$\psi_i = \rho_{3i} - \delta_{3i} \qquad i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

(δ_{ij} simboli di Kronecker).

La condizione è necessaria. Supposto il moto di precessione, con $\boldsymbol{c}_3'$ come asse di precessione, segue l'esistenza di un vettore $\boldsymbol{k}$ solidale a T′ tale che

$$(\rho - \mathrm{I})\, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{c}_3' = 0 \tag{9}$$

(I è la matrice identica). Ne segue

$$\dot{\rho} \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{c}_3' = 0\,. \tag{10}$$

Il sistema di equazioni (9), (10) si può scrivere nella forma

$$\begin{cases} \rho_{31} k_1 + \rho_{32} k_2 + (\rho_{33} - 1) k_3 = 0 \\ \dot{\rho}_{31} k_1 + \dot{\rho}_{32} k_2 + \dot{\rho}_{33} k_3 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

ove le k_i denotano evidentemente le componenti di $\boldsymbol{k}$ rispetto a T′.

Supposto che $\rho(t)$ rappresenti effettivamente una precessione (che comporta $\rho_{33} \neq 1$) le equazioni $(11)_1$, $(11)_2$ sono tra loro indipendenti. La loro dipendenza infatti implicherebbe

$$\dot{\rho}_{3i} = \lambda\,(\rho_{3i} - \delta_{3i}) \tag{12}$$

o anche

$$\frac{\mathrm{d}\,(\rho_{3i}\,\rho_{3i})}{\mathrm{d}t} = 2\lambda\,(1 - \rho_{33}) \tag{13}$$

relazione incompatibile con il fatto che ρ è matrice di rotazione.

Da (11) segue, in generale [(1)],

$$
(14) \qquad
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\dot\rho_{32}(\rho_{33}-1)-\rho_{32}\,\dot\rho_{33}}{\rho_{31}\,\dot\rho_{33}-(\rho_{33}-1)\,\dot\rho_{31}}\,k_2\\
k_3 &= \frac{\dot\rho_{31}\,\rho_{32}-\dot\rho_{32}\,\rho_{31}}{\rho_{31}\,\dot\rho_{33}-(\rho_{33}-1)\,\dot\rho_{31}}\,k_2\,.
\end{aligned}
$$

Poiché $\boldsymbol{k}$ è un vettore costante, tali saranno anche le sue componenti e quindi devono annullarsi le derivate dei coefficienti di k_2 nelle (14). Imponendo tale condizione e tenuto conto di (8) segue (7).

È immediato percorrere a ritroso questo ragionamento dimostrando così anche la sufficienza della condizione.

Vale la pena di osservare che la condizione (7) equivale al fatto che il vettore applicato $(0\,,\boldsymbol{\psi})$ appartenga ad un piano fisso.

Infatti detto $\boldsymbol{n}$ il versore normale alla giacitura di $\boldsymbol{\psi}$ e $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ (che per le (12), (13), non sono paralleli) si può scrivere:

$$
(15) \qquad \boldsymbol{\psi}\times\dot{\boldsymbol{\psi}} = f(t)\,\boldsymbol{n}
$$

da cui derivando si ottiene

$$
(16) \qquad \boldsymbol{\psi}\times\ddot{\boldsymbol{\psi}} = \dot f\boldsymbol{n} + f\dot{\boldsymbol{n}}\,.
$$

Osservando che sia $\boldsymbol{\psi}\times\dot{\boldsymbol{\psi}}$ come $\boldsymbol{\psi}\times\ddot{\boldsymbol{\psi}}$ sono paralleli ad $\boldsymbol{n}$, da (16) segue il parallelismo di $\dot{\boldsymbol{n}}$ ad $\boldsymbol{n}$ che implica l'annullarsi di $\dot{\boldsymbol{n}}$.

Si deduce l'invariabilità della giacitura normale ad $\boldsymbol{n}$ e, pertanto, l'appartenenza di $(0\,,\boldsymbol{\psi})$ ad un piano fisso.

3. È nota la possibilità di rappresentare una rotazione mediante il vettore $\boldsymbol{q}$ avente la direzione dell'asse di rotazione e modulo uguale alla tangente del semiangolo di rotazione.

Se una rotazione r è data come prodotto di due rotazioni r', r'':

$$
(17) \qquad r = r'\,r''
$$

e $\boldsymbol{q}\,,\boldsymbol{q}',\boldsymbol{q}''$ sono i rispettivi vettori caratteristici, sussiste come noto la relazione:

$$
(18) \qquad \boldsymbol{q} = \frac{1}{1-\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{q}''}\,(\boldsymbol{q}'+\boldsymbol{q}''+\boldsymbol{q}'\times\boldsymbol{q}'')\,.
$$

(1) Un minore del secondo ordine della matrice dei coefficienti delle (11) è certamente diverso da zero. Qui si suppone che tale sia il denominatore delle (14). La trattazione è analoga e porta ai medesimi risultati anche se il minore diverso da zero è diverso da quel denominatore.

Tenendo conto che per i vettori caratteristici delle rotazioni ρ^c e ρ^k valgono le

$$\mathbf{q}^c = q^c\,\mathbf{c} \quad , \quad \mathbf{q}^k = q^k\,\mathbf{k} \tag{19}$$

nei moti di precessione il vettore $\mathbf{q}$ è esprimibile nella forma

$$\mathbf{q} = \frac{1}{1 - q^c q^k\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{k}}\,(q^c\,\mathbf{c} + q^k\,\mathbf{k} + q^c q^k\,\mathbf{c}\times\mathbf{k})\,. \tag{20}$$

Si può quindi affermare che il vettore $\mathbf{q}\,(t)$ rappresenta una precessione se e solo se è possibile darne una rappresentazione del tipo (20) con $\mathbf{c}$ e $\mathbf{k}$ fissi nella terna T′.

È evidente che il fatto che nei moti di precessione il vettore $\mathbf{q}\,(t)$ soddisfi la (20) comporta delle restrizioni sulle posizioni che può assumere l'estremo del vettore applicato $(0\,,\,\mathbf{q}\,(t))$.

Per semplicità assumiamo la terna di riferimento T′, trirettangola e levogira di versori $\mathbf{c}_1'\,,\,\mathbf{c}_2'\,,\,\mathbf{c}_3'$, con

$$\mathbf{c}_3' = \mathbf{c} \quad , \quad \mathbf{c}_1' = \text{vers}\,(\mathbf{c}\times\mathbf{k})\,. \tag{21}$$

Indicando con $q_1\,,\,q_2\,,\,q_3$ le componenti di $\mathbf{q}$ rispetto a T′ e con ϑ l'angolo di $\mathbf{c}$ e $\mathbf{k}$ dalla (20) si ha

$$q_1 = \frac{q^c q^k \operatorname{sen}\vartheta}{1 - q^c q^k \cos\vartheta} \quad , \quad q_2 = \frac{q^k \operatorname{sen}\vartheta}{1 - q^c q^k \cos\vartheta} \quad , \quad q_3 = \frac{q^c + q^k \cos\vartheta}{1 - q^c q^k \cos\vartheta}\,. \tag{22}$$

Con qualche ulteriore passaggio si giunge alla relazione

$$\frac{q_1^2 + q_2^2}{q_2 q_3 - q_1} = \operatorname{tg}\vartheta\,. \tag{23}$$

Data la costanza dell'angolo ϑ si può dire che durante un moto di precessione l'estremo del vettore applicato $(0\,,\,\mathbf{q}\,(t))$ appartiene sempre all'iperboloide ad una falda di equazione

$$(x_1')^2 + (x_2')^2 - a\,(x_2'\,x_3' - x_1') = 0 \tag{24}$$

dove la costante a rappresenta la tangente dell'angolo di precessione.

Poiché il vettore $\mathbf{q}$ ha le medesime componenti rispetto alle due terne T′ e T, anche rispetto a T il punto $(0\,,\,\mathbf{q}\,(t))$ appartiene all'iperboloide ad una falda di equazione (24) (ove si intenda soppresso l'apice).