Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alfonso Maio, Anna-Maria Monte

Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in un gas ionizzato

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **63** (1977), n.1-2, p. 52–58.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_1-2_52_0>

Fisica matematica. — *Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in un gas ionizzato* (**). Nota (*) di ALFONSO MAIO e ANNAMARIA MONTE, presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — A problem concerning the one-dimensional wave propagation in a dispersive medium is solved.

1. INTRODUZIONE

Si consideri un campo elettromagnetico $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, dipendente oltre che dal tempo t dalla sola coordinata x di un sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$ i cui versori indicheremo con $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$; siano poi $\mathbf{E} = \mathrm{E}\boldsymbol{j}$ ed $\mathbf{H} = \mathrm{H}\boldsymbol{k}$. Il campo si propaghi nel semispazio $x > 0$ occupato da un gas ionizzato omogeneo. Indichiamo rispettivamente con N, e, m, il numero degli elettroni per unità di volume, la carica e la massa dell'elettrone e con $\nu > 0$ il numero degli urti nell'unità di tempo; sia poi μ la permeabilità magnetica ed ε la costante dielettrica che compete al gas quando non è ionizzato.

Com'è noto [1], nell'ipotesi che, per ogni $x \geq 0$, E ed H siano nulli fino all'istante $t = 0$ e che il contributo degli ioni e l'azione di H sugli elettroni siano trascurabili, la densità di corrente dovuta ai corpuscoli nel gas si può scrivere $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{j}$ con

$$u = \mathrm{A} \int_0^t \exp\left[-\nu (t - \tau)\right] \mathrm{E}(\tau)\, d\tau \tag{1.1}$$

dove si è posto $\mathrm{A} = \mathrm{N}e^2/m$.

Eliminando H tra le equazioni di Maxwell e tenendo conto della (1.1) si ottiene

$$\mathrm{E}_{xx} = \varepsilon\mu\, \mathrm{E}_{tt} + \mathrm{A}\mu\, \mathrm{E} - \mathrm{A}\mu\nu \int_0^t \exp\left[-\nu (t - \tau)\right] \mathrm{E}(\tau)\, d\tau \tag{1.2}$$

la quale è un caso particolare della seguente equazione integro-differenziale

$$\mathrm{E}_{xx} = \varepsilon\mu \left[\mathrm{E}_{tt} + 2\,\alpha\, \mathrm{E}_t + (\alpha^2 - \beta^2)\, \mathrm{E} - \beta^2 \int_0^t \mathrm{G}(t - \tau)\, \mathrm{E}(\tau)\, d\tau\right] \tag{1.3}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1977.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.
(1) Cfr. ad esempio D. GRAFFI [1] oppure [10], pp. 78–79.

che D. Graffi in [2] ha risolto con il metodo della trasformazione di Laplace (2). Più precisamente il Graffi ha determinato la soluzione della (1.3) nell'ipotesi che $E(x, t)$ sia nulla all'istante iniziale $t_0 = 0$, risulti, per ogni t infinitesima quando $x \to \infty$ ed assuma, istante per istante, valori prefissati sul piano $x = 0$. Tale soluzione, anche se di notevole interesse teorico perchè fornisce un teorema di esistenza, risulta poco agevole per le applicazioni in quanto è espressa mediante un integrale di convoluzione il cui nucleo è una serie di funzioni di Bessel. M. Fabrizio [4], affrontando la stessa questione, ha ottenuto quale espressione del nucleo una trascendente più semplice, ma sempre espressa da una serie. Scopo della presente Nota è appunto quello di mostrare come sia possibile – almeno nel caso particolare della (1.2) – esprimere E ed H mediante formule di più facile applicazione ai fini del calcolo numerico e dell'analisi del comportamento asintotico.

La posizione del problema e l'enunciato dei principali risultati ottenuti sono riportati al numero 2.

Ringraziamo il Prof. P. Renno per avere suggerito l'argomento della presente ricerca e per le utili discussioni avute. Desideriamo altresì esprimere la nostra gratitudine al Prof. D. Graffi per tutti i suggerimenti ed i consigli ricevuti.

2. POSIZIONE DEL PROBLEMA ED ENUNCIATO DEI RISULTATI

Con riferimento all'equazione (1.2) osserviamo che è possibile assumere $\varepsilon\mu = 1$ in quanto a tale caso ci si può sempre ricondurre ponendo $x\sqrt{\varepsilon\mu} = x'$, per cui posto $a = \nu$ e $b = A/\varepsilon$ si ha

$$E_{xx} = E_{tt} + bE - ab \int_0^t \exp\left[-a(t-\tau)\right] E(\tau)\, d\tau \,. \tag{2.1}$$

Pertanto il problema enunciato al numero 1 si riduce alla ricerca della funzione $E(x, t)$ che verifichi l'equazione (2.1) con le seguenti condizioni al contorno

$$\frac{\partial^j}{\partial t_j} E(x, 0) = 0 \qquad (j = 0, 1) \qquad \forall x \geq 0 \tag{2.2}$$

$$E(0, t) = \varphi(t) \qquad \lim_{x\to\infty} E(x, t) = 0 \qquad \forall t \geq 0 \tag{2.3}$$

Definizione 2.1. Diremo soluzione regolare del problema (2.1)–(2.2)–(2.3), *una funzione* $E(x, t)$ *continua nell'insieme* $S \equiv \{(x, t) : x \geq 0 \,, t \geq 0\}$, *di classe* $C^{(2)}$ *in* $S - \partial S$ *e tale da verificare la* (2.1) *con le condizioni* (2.2)–(2.3).

(2) Com'è ovvio, per ricavare la (1.2) dalla (1.3) basta porre $\alpha = 0$, $\beta^2 = -A/\varepsilon$, $G(t) = -\nu \exp(-\nu t)$.

Per risolvere tale problema useremo il metodo della trasformazione di Laplace, pervenendo al

TEOREMA 2.1. *Nelle seguenti ipotesi per la funzione* $\varphi(t)$:

(i) $\varphi(t) \in C^{(2)}([0, +\infty[)$

(ii) $\varphi(0) = 0$

(iii) $\varphi''(t)$ *è assolutamente trasformabile secondo Laplace nel semipiano* $\mathrm{Re}(s) > s_0$,

il problema (2.1)-(2.2)-(2.3) *ammette una ed una sola soluzione regolare data da*

$$E(x, t) = U(t - x)\,[\varphi(t - x) - \varphi'(t) * F(x, t)] \tag{2.4}$$

dove $U(z)$ *è il fattore unitario ed* $F(x, t)$ *è la funzione così definita*

$$F(x, t) = x\sqrt{b}\int_x^t \frac{J_1(\sqrt{b(u^2 - x^2)})}{\sqrt{u^2 - x^2}} \exp\left[-a\left(\frac{u^2 - x^2}{2u^2}\right)t\right] \times$$
$$\times I_0\left[a\left(\frac{u^2 - x^2}{2u^2}\right)\sqrt{t^2 - u^2}\right] du\,.$$

3. RISOLUZIONE DEL PROBLEMA

Il problema enunciato al paragrafo precedente è un problema lineare a coefficienti costanti; esso quindi può risolversi con il metodo della trasformazione funzionale di Laplace. Con riferimento alle condizioni iniziali (2.2) è necessario trasformare rispetto alla variabile temporale. Pertanto posto,

$$\begin{aligned} \hat{E}(x, s) &= \int_0^\infty \exp(-st)\, E(x, t)\, dt = L[E(x, t)] \\ \hat{\varphi}(s) &= \int_0^\infty \exp(-st)\, \varphi(t)\, dt = L[\varphi(t)] \end{aligned} \tag{3.1}$$

ed applicando alle (2.1)-(2.2)-(2.3) noti teoremi sulla L-trasformazione, si ha il seguente problema

$$\hat{E}''(x, s) - \frac{s^3 + as^2 + bs}{s + a}\,\hat{E}(x, s) = 0 \qquad (x > 0) \tag{3.2}$$

$$\hat{E}(0, s) = \hat{\varphi}(s) \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \hat{E}(x, s) = 0 \tag{3.3}$$

nell'incognita funzione $\hat{E}(x, s)$. Se indichiamo con σ la determinazione principale di $[(s^2 + as + b)/(s^2 + as)]^{\frac{1}{2}}$ è facile verificare che la soluzione delle (3.2)-(3.3) si può porre nella forma

$$\hat{E}(x, s) = \exp(-xs)\,\hat{\varphi}(s) - \frac{\exp(-xs) - \exp(-xs\sigma)}{s}\, s\hat{\varphi}(s). \tag{3.4}$$

Occorre quindi determinare l'antitrasformata della seguente funzione

$$\hat{G}(x, s) = \frac{\exp(-xs) - \exp(-xs\sigma)}{s}. \tag{3.5}$$

A tale scopo indicando con $U(z)$ la funzione unitaria e con

$$\begin{aligned} F(x, t) = x\sqrt{b} \int_x^t \frac{J_1(\sqrt{b}\sqrt{u^2 - x^2})}{\sqrt{u^2 - x^2}} \exp\left[-a\left(\frac{u^2 - x^2}{2u^2}\right) t\right] \times \\ \times I_0\left[a\left(\frac{u^2 - x^2}{2u^2}\right)\sqrt{t^2 - u^2}\right] du \end{aligned} \tag{3.6}$$

e posto $G(x, t) = U(t - x)\,F(x, t)$, si dimostra il seguente

LEMMA 3.1. *Per ogni* $x > 0$, *nel semipiano* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *sussiste la seguente formula di* L*-trasformazione*

$$L(G(x, t)) = \hat{G}(x, s). \tag{3.7}$$

Dimostrazione. Siano α, β, γ tre parametri a parte reale positiva e J_1 la funzione di Bessel di prima specie e di ordine uno; esprimiamo la $\hat{G}(x, s)$ mediante la seguente rappresentazione integrale ([6], vol. II, pag. 31)

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-\alpha\sqrt{u + \beta^2})}{\sqrt{u + \beta^2}} J_1(\gamma\sqrt{u}) \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{\exp(-\alpha\beta) - \exp(-\beta\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2})}{\beta\gamma} \tag{3.8}$$

assumendo[3] $\alpha = x\sqrt{2s^2 + 2as}$; $\beta = s/\sqrt{2s^2 + 2as}$; $\gamma = x\sqrt{2b}$.

Nell'ipotesi che sia $x > 0$ e $\mathrm{Re}(s) > 0$ possiamo scrivere, com'è facile verificare,

$$\begin{aligned} &\frac{\exp(-xs) - \exp(-xs\sigma)}{xs\sqrt{2b}} = \\ &= \int_0^\infty \frac{\exp\left[-x\sqrt{2u+1}\sqrt{\left(s + \frac{au}{2u+1}\right)^2 - \left(\frac{au}{2u+1}\right)^2}\right]}{\sqrt{\left(s + \frac{au}{2u+1}\right)^2 - \left(\frac{au}{2u+1}\right)^2}} \frac{J_1(x\sqrt{bu})}{\sqrt{u(2u+1)}} du. \end{aligned} \tag{3.9}$$

(3) Precisiamo una volta per tutte che i radicali che intervengono vanno considerati con la determinazione principale.

D'altra parte – se h è una costante reale positiva, p e q sono due costanti complesse ed I_0 la funzione modificata di Bessel di prima specie e di ordine zero, com'è noto ([7], p. 136) – risulta

$$\int_h^\infty \exp\left[-(q+s)\,t\right]\cdot I_0\left(p\sqrt{t^2-h^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\exp\left[-h\sqrt{(s+q)^2-p^2}\right]}{\sqrt{(s+q)^2-p^2}}$$

purchè sia

$$\mathrm{Re}\,(s) > \mathrm{Re}\,(p) - \mathrm{Re}\,(q)\,. \tag{3.10}$$

Se $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ la (3.10) è certo verificata ponendo $p = q = au/(2u+1)$, $h = x\sqrt{2u+1}$ in modo da avere

$$\frac{\exp\left[-x\sqrt{2u+1}\sqrt{\left(s+\dfrac{au}{2u+1}\right)^2-\left(\dfrac{au}{2u+1}\right)^2}\,\right]}{\sqrt{\left(s+\dfrac{au}{2u+1}\right)^2-\left(\dfrac{au}{2u+1}\right)^2}} =$$

$$= \int_{x\sqrt{2u+1}}^\infty \exp\left[-\left(\frac{au}{2u+1}+s\right)t\right]\cdot I_0\left[\frac{au}{2u+1}\sqrt{t^2-x^2(2u+1)}\right]\mathrm{d}t$$

e quindi sostituendo nella (3.9) si ottiene

$$\frac{\exp(-xs)-\exp(-xs\sigma)}{xs\sqrt{2b}} = \tag{3.11}$$

$$= \int_0^\infty J_1\left(x\sqrt{2bu}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\sqrt{2u+1}}\int_{x\sqrt{2u+1}}^\infty \exp\left[-\left(\frac{au}{2u+1}+s\right)t\right]\times$$

$$\times I_0\left[\frac{au}{2u+1}\sqrt{t^2-x^2(2u+1)}\right]\mathrm{d}t\,.$$

Inoltre, applicando la nota diseguaglianza ([8], pag. 49) alle funzioni J_1 e I_0

$$|\,J_\nu(w)\,| \le \frac{\left|\left(\dfrac{w}{2}\right)^\nu\right|}{\Gamma(\nu+1)}\exp|\,\mathrm{Im}\,(w)\,| \qquad (\mathrm{Re}\,(\nu) > -\tfrac{1}{2})$$

si ha

$$\frac{|\,J_1(x\sqrt{2bu})\,|}{\sqrt{u}} \le \tfrac{1}{2}\,x\sqrt{2b}$$

e

$$\exp\left[-\frac{au}{2u+1}\,t\right]\cdot I_0\left[\frac{au}{2u+1}\sqrt{t^2-x^2(2u+1)}\right] \le 1$$

per cui risulta applicabile, com'è facile verificare, il teorema di Fubini ([7], pag. 22) in modo da avere

$$\frac{\exp(-xs) - \exp(-xs\sigma)}{s} = \tag{3.12}$$

$$= x\sqrt{b}\int_x^\infty \exp(-st)\,dt \int_x^t \frac{J_1(\sqrt{b}\,\sqrt{u^2-x^2})}{\sqrt{u^2-x^2}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-a\left(\frac{u^2-x^2}{2u^2}\right)t\right] I_0\left[a\left(\frac{u^2-x^2}{2u^2}\right)\sqrt{t^2-u^2}\right]du$$

che coincide proprio con la (3.7).

In virtù del lemma ora dimostrato è facile provare il teorema enunciato al numero 2. Infatti, con riferimento alle ipotesi ivi precisate sulla $\varphi(t)$, la funzione $F(x, t)$ data dalla (3.6) risulta di classe $C^{(3)}(S)$ ed L–trasformabile rispetto a t insieme alle sue derivate prima e seconda.

Osservando che D. Graffi ha dimostrato che il problema (1.3)–(2.2)–(2.3) ammette una ed una sola soluzione L–trasformabile, se ne conclude che la $E(x, t)$ data dalla (2.4) è l'unica soluzione regolare del nostro problema.

OSSERVAZIONE. L'equazione (2.1) si riduce a quella dei telegrafisti per $a = 0$; è interessante osservare che per il tipo di problema posto la formula risolutiva (2.4) fornisce la ben nota soluzione. Infatti la (2.1), in virtù delle condizioni iniziali (2.2), si riduce all'equazione

$$E_{tt} - E_{xx} + bE = 0$$

che, risolta con le condizioni (2.3), ammette la soluzione

$$E(x, t) = U(t-x)\left[\varphi(t-x) - x\sqrt{b}\,\frac{J_1(\sqrt{b(t^2-x^2)})}{\sqrt{t^2-x^2}} * \varphi(t)\right].$$

Tale formula si ricava subito dalla (2.4); infatti mediante un'integrazione per parti ed osservando che $\varphi(0) = 0$ e che $I_0(0) = 1$ si ha

$$E(x, t) = U(t-x)\left[\varphi(t-x) - \int_x^t \varphi(t-\tau)\,\frac{\partial F(x, \tau)}{\partial \tau}\,d\tau\right]$$

con

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = x\sqrt{b}\,\frac{J_1(\sqrt{b(\tau^2-x^2)})}{\sqrt{\tau^2-x^2}}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] D. GRAFFI (1936) – *Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia.* « Rend. Istituto Lombardo » (2), *69*, 151–166.

[2] D. GRAFFI (1963) – *Sulla propagazione nei mezzi dispersivi.* « Ann. Mat. Pura ed Applicata », serie IV, *60*, 173–196.

[3] M. FABRIZIO (1968) – *Sull'equazione di propagazione nei mezzi viscoelastici.* « Istituto Lombardo (Rend. Sc.) », *A 102*, 437–441.

[4] M. FABRIZIO (1968) – *Su una equazione integro-differenziale per i mezzi dispersivi,* « Boll. U.M.I. », (4), N. 3, 369–381.

[5] P. RENNO (1972) – *Un problema di aerotermochimica linearizzata: soluzione ed approssimazione asintotica.* « Rend. Acc. di Sc. Fic. e Mat. (Napoli) », Serie 4, *39*.

[6] A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER and F. G. TRICOMI (1954) – *Tables of integral transforms*, Voll. I–II, McGraw Hill. Book Comp.

[7] A. GHIZZETTI and A. OSSICINI (1971) – *Transformate di Laplace e Calcolo simbolico*, U.T.E.T.

[8] G. N. WATSON (1966) – *A treatise on the theory of Bessel function.* Cambridge University Press, II ed.

[9] G. DOETSCH (1950) – *Handbuck der Laplace transformation*, Bond I, II, III, Verlag Birkauser. Basel.

[10] D. GRAFFI (1965) – *Onde elettromagnetiche*, C.N.R. Roma.