Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cataldo Agostinelli

Soluzioni stazionarie del problema del moto di un corpo rigido intorno al baricentro, soggetto a un campo di forze newtoniane

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.6, p. 797–803.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_6_797_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

Meccanica. — *Soluzioni stazionarie del problema del moto di un corpo rigido intorno al baricentro, soggetto a un campo di forze newtoniane.* Nota [*] del Socio CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — We consider the motion about the center of mass of a solid body subjected to a newtonian field of forces and we seek those solutions of the Euler–Poisson equations, governing the motion, which make stationary the integral of the energy subordinately to the existence of the other known integrals. So we obtain a solution in which the cosine of the angle of mutation is furnished in function of the time by means of an elliptic integral. This solution contains four arbitrary constants and therefore it defines a class of ∞^4 possible motions for the considered solid body.

1. Il problema del moto intorno al baricentro di un corpo solido soggetto a un campo di forze newtoniane, che sotto certi aspetti interessa il moto intorno al baricentro di un veicolo spaziale sotto l'azione del campo di attrazione terrestre quando si trascurino in questa attrazione i termini di ordine superiore al cubo dell'inverso della distanza, si risolve come si sa mediante quadrature, poiché le equazioni di Eulero–Poisson, che reggono il moto, ammettono, oltre gli integrali dell'energia, delle aree e dei coseni direttori, un quarto integrale primo che è quadratico nelle componenti della velocità angolare.

È sorprendente il fatto che questi quattro integrali si presentano anche in altri tre problemi di natura sostanzialmente diversa, ma analiticamente equivalenti. Il primo è quello di De Brun [1] relativo al moto di un solido con un punto fisso, le cui molecole sono attratte da un piano fisso con forze proporzionali alla distanza da questo piano, problema ridotto alle quadrature da Kobb [2]. Stekloff [3] ha dimostrato poi che alle equazioni del problema di De Brun possono essere ricondotte le equazioni date da Clebsch per il movimento di un corpo solido in un liquido indefinito. Infine in una Nota del Bollettino dell'U.M.I del 1962 [4], dimostrai un notevole teorema di equivalenza in magnetoidrodinamica, secondo il quale esiste un movimento magnetoidrodinamico di un fluido elettricamente conduttore incomprensibile in un recipiente ellissoidale, dotato di moto traslatorio, in cui le linee di corrente e

(*) Presentata nella seduta del 23 giugno 1977.

(1) F. DE BRUN, *Rotation Dring en fix punkt*, «Akademiens Vörhandlingar», Stockholm, 1893. Vedi anche: P. APPELL, Traité de Mécanique Rationnelle, T. II, Chap XXV, n. 499. Gauthier-Villars, Paris, 1935.

(2) G. KOBB, *Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un points fixe*. «Bulletin de la Société Mathématique de France», *23*, 1895.

(3) M. STEKLOFF, «Comptes rendus», t. CXXXV, 1902.

(4) C. AGOSTINELLI, *Su un notevole teorema di equivalenza in magnetoidratinamica*. «Bollettino Un. Mat. Ital.», marzo 1962. Vedi anche C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica*, Cap. IV, § 4, n 7, «Monografie Matematiche del C.N.R.», Edizioni Cremonese, Roma, 1966.

le linee vorticose sono rette, movimento che si determina con quadrature e che, dal punto di vista analitico, è equivalente a quello del problema di De Brun.

I quattro integrali a cui dianzi ho accennato, coll'introduzione degli angoli di Eulero e colla riduzione delle equazioni del moto a forma canonica hamiltoniana, consentono, in base a un teorema di Liouville della Meccanica analitica e coll'applicazione del teorema di Jacobi sull'integrazione dei sistemi canonici, di ottenere tutti gli integrali di quelle equazioni che risolveno il problema.

Ma l'applicazione effettiva del procedimento si presenta oltremodo complicata ed implica, per ottenere i momenti p_θ , p_φ, coniugati degli angoli di Eulero θ , φ, in funzione di questi angoli, la preventiva risoluzione di una equazione completa di quarto grado.

In vista di questa difficoltà mi sono proposto in questa Nota di determinare, con mezzi analitici più semplici, delle classi di soluzioni del problema considerato, sia pure con un grado minore di generalità. Esse si ottengono rendendo stazionario l'integrale dell'energia compatibilmente con l'esistenza degli altri tre integrali a cui ho accennato. In base a questo criterio ho ottenuto una soluzione del problema in cui l'equazione risolvente dà il coseno dell'angolo di mutazione $\boldsymbol{\theta}$ in funzione del tempo mediante un integrale ellittico. La soluzione dipende da quattro costanti arbitrarie e cioè: la costante dell'energia $\boldsymbol{h}$, un opportuno parametro $\boldsymbol{\nu}$, la costante temporale e il valore iniziale dell'angolo di precessione. Essa definisce pertanto una classe di ∞^4 moti possibili per il solido considerato.

2. Le equazioni di Eulero-Poisson che regolano il moto di un corpo rigido intorno al baricentro, soggetto a un campo di forze newtoniane, sono notoriamente [5]

$$
\text{(1)}\quad
\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt}-(B-C)\,qr+\frac{3g}{R}(B-C)\,\gamma_2\gamma_3=0\\
&B\frac{dq}{dt}-(C-A)\,rp+\frac{3g}{R}(C-A)\,\gamma_3\gamma_1=0\\
&C\frac{dr}{dt}-(A-B)\,pq+\frac{3g}{R}(A-B)\,\gamma_1\gamma_2=0,
\end{aligned}
\qquad\qquad
\text{(2)}\quad
\begin{aligned}
&\frac{d\gamma_1}{dt}=\gamma_2 r-\gamma_3 q\\
&\frac{d\gamma_2}{dt}=\gamma_3 p-\gamma_1 r\\
&\frac{d\gamma_3}{dt}=\gamma_1 q-\gamma_2 p,
\end{aligned}
$$

dove γ_1 , γ_2 , γ_3 sono i coseni direttori della congiungente il baricentro G del corpo col centro attirante stazionario O, rispetto agli assi principali d'inerzia relativi al baricentro del corpo medesimo; **R** è la distanza OG e gli altri elementi hanno il significato usuale.

(5) Cfr. IU. A. ARKHANGEL'SKII, *On single valued integrals in the problem of motion of a solid body in a newtonian field of forces.* « Y Appl. Math. Mech. », *26*, 1962. Vedi anche: C. AGOSTINELLI, *Su una soluzione particolare del problema del moto di un corpo rigido asimmetrico in un campo di forze newtoniane.* « Rendiconti Accad. Naz. Lincei », gennaio 1977.

Il sistema di equazioni (1), (2) ammette l'integrale dell'energia

$$H \equiv \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \tfrac{1}{2}\,\omega_0^2(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) = h\ (\text{costante}), \tag{3}$$

$$(\omega_0^2 = 3\,g/R),$$

l'integrale delle aree

$$F_1 \equiv Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = c_1\ (\text{costante}), \tag{4}$$

e l'ulteriore integrale

$$F_2 \equiv A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 - \omega_0^2(BC\gamma_1^2 + CA\gamma_2^2 + AB\gamma_3^2) = c_2\ (\text{costante}), \tag{5}$$

l'ultimo dei quali si ottiene moltiplicando le (1) rispettivamente per Ap, Bq, Cr, sommando e tenendo conto delle (2).

Ad essi occorre associare ancora l'integrale dei coseni direttori

$$\chi^2 \equiv \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \tag{6}$$

Gli integrali (3), (4), (5) e (6) consentono come si sa, di ridurre alle quadrature il problema di moto considerato, applicando il teorema di Liouville e quello di Jacobi sull'integrazione di un sistema canonico. Ma questa integrazione si presenta oltremodo complicata poiché richiede la preventiva risoluzione di un'equazione completa di 4^0 grado.

Si presenta allora spontaneo di vedere se si possono trovare, con mezzi più semplici, classi di soluzioni, sia pure con un minore grado di generalità. Queste soluzioni sono quelle che rendono stazionario l'integrale (3) dell'energia compatibilmente con l'esistenza degli integrali (4), (5) e (6) delle aree, del momento della quantità di moto e dei coseni direttori. La corrispondente condizione di stazionarietà; sotto forma simbolica si può scrivere [6]:

$$\delta H - \lambda\delta(\chi^2) - \mu\delta F_1 - \nu\delta F_2 = 0, \tag{7}$$

dove λ, μ, ν sono tre moltiplicatori, generalmente incogniti.

3. Esplicitando la condizione (7), avendo riguardo alle (3), (4), (5) e (6), e uguagliando a zero i coefficienti di δp, δq, δr, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$, si deducono i seguenti due sistemi di condizioni

$$\begin{aligned} &Ap - A\gamma_1\mu - 2A^2p\cdot\nu = 0\\ &Bq - B\gamma_2\mu - 2B^2q\cdot\nu = 0\\ &Cr - C\gamma_3\mu - 2C^2r\cdot\nu = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\omega_0^2A\gamma_1 - 2\gamma_1\lambda - Ap\mu + 2\,\omega_0^2BC\,\gamma_1\cdot\nu = 0\\ &\omega_0^2B\gamma_2 - 2\gamma_2\lambda - Bq\mu + 2\,\omega_0^2CA\,\gamma_2\cdot\nu = 0\\ &\omega_0^2C\gamma_3 - 2\gamma_3\lambda - Cr\mu + 2\,\omega_0^2AB\,\gamma_3\cdot\nu = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

(6) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Vol. II, P. II, Cap. X, § 9, n. 56. Zanichelli, Bologna, 1927.

Dalle equazioni (8) si ricava

$$(10) \qquad p = \frac{\mu}{1-2\,A\nu}\,\gamma_1 \quad , \quad q = \frac{\mu}{1-2\,B\nu}\,\gamma_2 \quad , \quad r = \frac{\mu}{1-2\,C\nu}\,\gamma_3 \,.$$

Sostituendo nelle equazioni (9), per $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tutti e tre diversi da zero, si deducono le relazioni

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\omega_0^2\,A - 2\,\lambda + 2\,\omega_0^2\,BC\cdot\nu = A\mu^2/(1-2\,A\nu)\\ &\omega_0^2\,B - 2\,\lambda + 2\,\omega_0^2\,CA\cdot\nu = B\mu^2/(1-2\,B\nu)\\ &\omega_0^2\,C - 2\,\lambda + 2\,\omega_0^2\,AB\cdot\nu = C\mu^2/(1-2\,C\nu)\,,\end{aligned}$$

e da queste, sottraendole a due a due, e supponendo $A \neq B \neq C$, si ha l'unica relazione

$$(12) \qquad \mu^2 = \omega_0^2\,(1-2\,A\nu)\,(1-2\,B\nu)\,(1-2\,C\nu)\,.$$

Dopo ciò da ciascuna delle (11) si deduce

$$(13) \qquad \lambda = \omega_0^2\,[(AB+BC+CA)\,\nu - 2\,ABC\nu^2]\,.$$

Le relazioni (12) e (13) forniscono i moltiplicatori μ e λ in funzione di ν.

4. È opportuno ora vedere come si trasformano gli integrali (3), (4), (5) quando in luogo di p, q, r si sostituiscano i valori (10) in funzione di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e si osservi che $\gamma_3^2 = 1 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$.

Ponendo per semplicità

$$(14) \qquad \alpha_1 = \sqrt{\frac{(1-2\,B\nu)\,(1-2\,C\nu)}{1-2\,A\nu}} \quad , \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{(1-2\,C\nu)\,(1-2\,A\nu)}{1-2\,B\nu}} \,,$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\frac{(1-2\,A\nu)\,(1-2\,B\nu)}{1-2\,C\nu}}$$

si ha dalle (10):

$$(15) \qquad p = \omega_0\,\alpha_1\,\gamma_1 \quad , \quad q = \omega_0\,\alpha_2\,\gamma_2 \quad , \quad r = \omega_0\,\alpha_3\,\gamma_3\,.$$

Dall'integrale (3) dell'energia segue quindi

$$(16) \qquad \frac{A-C}{1-2\,A\nu}\,\gamma_1^2 + \frac{B-C}{1-2\,B\nu}\,\gamma_2^2 = \frac{[(2\,h/\omega_0^2) - C\,(\alpha_3^2+1)]\,(1-2\,C\nu)}{2\,[1-(A+B+C)\,\nu + 4\,ABC\,\nu^3]}\,.$$

Analogamente gli integrali (4) e (5) porgono rispettivamente

$$(17) \qquad \frac{A-C}{1-2\,A\nu}\,\gamma_1^2 + \frac{B-C}{1-2\,B\nu}\,\gamma_2^2 = \frac{c_1}{\omega_0\,\alpha_3} - C$$

$$(18) \qquad \frac{A-C}{1-2\,A\nu}\,\gamma_1^2 + \frac{B-C}{1-2\,B\nu}\,\gamma_2^2 =$$

$$= \frac{[(c_2/\omega_0^2) - C^2\,\alpha_3^2 + AB]\,(1-2\,C\nu)}{A+B+C-4\,(AB+BC+CA)\,\nu + 12\,ABC\,\nu^2}\,.$$

Le relazioni (16), (17) e (18), i cui primi membri sono eguali, richiedono che siano eguali anche i secondi membri.

Uguagliando il 2° membro della (17) al 2° membro della (16) si ricava

$$c_1 = \omega_0 \alpha_3 \left\{ C + \frac{[(2h/\omega_0^2 - C(\alpha_3^2 + 1)](1 - 2C\nu)}{2[1 - (A + B + C)\nu + 4ABC\nu^3]} \right\}, \tag{19}$$

e così pure dall'eguaglianza dei secondi membri delle (18) e (16) si ha

$$\frac{c_2}{\omega_0^2} - C^2\alpha_3^2 + AB = \left[\frac{2h}{w_0^2} - C(\alpha_3^2 + 1)\right] \cdot \tag{20}$$

$$\cdot \frac{A + B + C - 4(AB + BC + CA)\nu + 12\,ABC\,\nu^2}{2[1 - (A + B + C)\nu + 4ABC\nu^3]}.$$

In tal modo i tre integrali (3), (4) e (5) si riducono a uno solo e le costanti $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}_2$ sono fornite dalle (19) e (20) in funzione delle costanti di struttura del solido, della costante dell'energia $\boldsymbol{h}$ e del parametro $\boldsymbol{\nu}$, che può essere assunto esso pure come costante arbitraria. Questo parametro $\boldsymbol{\nu}$ ha le dimensioni dell'inverso di un momento d'inerzia e se supponiamo che sia $A < B < C$, per la realtà delle formule ottenute deve essere

$$\nu < \frac{1}{2C}, \qquad \text{oppure} \quad \frac{1}{2A} < \nu < \frac{1}{2B}.$$

5. Introducendo ora gli angoli di Eulero θ , φ , ψ e ricordando che

$$\begin{aligned} p &= \gamma_1 \dot{\psi} + \dot{\theta} \cos\varphi \\ q &= \gamma_2 \dot{\psi} - \dot{\theta} \operatorname{sen}\varphi \\ r &= \gamma_3 \dot{\psi} + \dot{\varphi}\,, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ \gamma_2 &= \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \\ \gamma_3 &= \cos\theta\,, \end{aligned} \tag{22}$$

le equazioni (15) porgono

$$\begin{aligned} \dot{\psi} + \frac{\dot{\theta}}{\operatorname{sen}\theta} \operatorname{ctg}\varphi &= \omega_0 \alpha_1 \\ \dot{\psi} - \frac{\dot{\theta}}{\operatorname{sen}\theta} \tan\varphi &= \omega_0 \alpha_2 \\ \dot{\psi} + \frac{\dot{\varphi}}{\cos\theta} &= \omega_0 \alpha_3\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Eliminando $\dot{\psi}$ tra la prima e la terza e tra la seconda e la terza delle (23) si deducono facilmente le relazioni

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = \omega_0(\alpha_1 - \alpha_3)\gamma_1\gamma_3 \quad , \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = \omega_0(\alpha_3 - \alpha_2)\gamma_2\gamma_3\,, \tag{24}$$

dalle quali segue l'integrale

$$(\alpha_1 - \alpha_3)\gamma_1^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)\gamma_2^2 = c_0 \text{ (costante)}\,. \tag{25}$$

Ricordando i valori (14) delle costanti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, questo integrale si può scrivere

$$\frac{A - C}{1 - 2 A\nu} \gamma_1^2 + \frac{B - C}{1 - 2 B\nu} \gamma_2^2 = \frac{c_0}{2 \alpha_3 \nu}, \tag{26}$$

che coincide con ciascuno dei tre integrali (16), (17) e (18), quando oltre alle (19) e (20), si assume

$$c_0 = \frac{\nu \left[(2 h/\omega_0^2) - C(\alpha_3^2 + 1)\right] \sqrt{(1 - 2 A\nu)(1 - 2 B\nu)(1 - 2 C\nu)}}{1 - (A + B + C)\nu + 4 + ABC\nu^3}. \tag{27}$$

Dalla (25) si ricava ora

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\alpha_3 - \alpha_2 + \frac{c_0}{\operatorname{sen}^2 \theta}\right), \tag{28}$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\alpha_1 - \alpha_3 - \frac{c_0}{\operatorname{sen}^2 \theta}\right)$$

e quindi

$$\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sen}^2 \theta} \cdot \tag{29}$$

$$\cdot \sqrt{\left[(\alpha_3 - \alpha_2 \beta_2 + c_0) - (\alpha_3 - \alpha_2) \cos^2 \theta\right]\left[(\alpha_1 - \alpha_3 - c_0) - (\alpha_1 - \alpha_3) \cos^2 \theta\right]}.$$

D'altra parte, sottraendo membro a membro le (23_1) e (23_2), si deduce

$$\frac{\dot{\theta}}{\operatorname{sen} \theta} = \omega_0 (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi .$$

per la (29) si ha allora

$$-\frac{d(\cos \theta)}{dt} = \omega_0 \cdot \tag{30}$$

$$\cdot \sqrt{\left[(\alpha_3 - \alpha_2 + c_0) - (\alpha_3 - \alpha_2) \cos^2 \theta\right]\left[(\alpha_1 - \alpha_3 - c_0) - (\alpha_1 - \alpha_3) \cos^2 \theta\right]}$$

che è l'equazione risolvente la quale fornisce il tempo t in funzione di $\cos \theta$ con una quadratura ellittica. Questa quadratura introduce una nuova costante arbitraria, la costante temporale. Con una inversione si ha $\cos \theta$ come funzione ellittica del tempo.

Dopo ciò le (28) forniscono il seno e il coseno dell'angolo di rotazione φ, pure in funzione del tempo.

Per avere infine l'angolo di precessione ψ in funzione del tempo moltiplichiamo la (23_1) per $\operatorname{sen}^2 \varphi$, la (23_2) per $\cos^2 \varphi$ e sommiamo membro a membro.

Si ottiene così

$$\dot{\psi} = \omega_0 (\alpha_1 \operatorname{sen}^2 \varphi + \alpha_2 \cos^2 \varphi),$$

che in virtù delle (28) diventa

$$\dot{\psi} = \omega_0 \left(\alpha_3 + \frac{c_0}{\operatorname{sen}^2 \theta}\right). \tag{31}$$

Essendo già noto $\cos\theta$ in funzione del tempo con un'altra quadratura si ha alla fine

$$\psi - \psi_0 = \omega_0 \left(\alpha_3 t + c_0 \int \frac{dt}{1 - \cos^2 \theta} \right), \tag{32}$$

dove ψ_0 è il valore iniziale dell'angolo di precessione.

Le relazioni (30), (28) e (32) dànno la soluzione richiesta nel caso stazionario considerato, soluzione che dipende dalla costante dell'energia $\boldsymbol{h}$, dal parametro (arbitrario) $\boldsymbol{v}$, dalla costante temporale e dal valore iniziale ψ_0 dell'angolo di precessione, dipende cioè da quattro costanti arbitrarie e definisce quindi una classe di ∞^4 movimenti possibili intorno al baricentro di un solido soggetto a un campo di forze newtoniane.