ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

FRANCO MIGLIORINI, JENÖ SZEP

Su una particolare decomposizione dei semigrupperi regolari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 62 (1977), n.6, p. 728–733.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_6_728_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Algebra. — *Su una particolare decomposizione dei semigrupperi regolari.* Nota di FRANCO MIGLIORINI^(*) e JENŐ SZÉP, presentata ^(**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — A special characteristic decomposition of a regular semigroup S by disjoint subsemigroups is given. The subsemigroups involved in the decomposition and the interrelations among them are studied.

Lo scopo di questo lavoro è studiare la composizione elementare e l'articolazione interna di un semigruppero regolare S attraverso una particolare decomposizione di S in sottosemigrupperi disgiunti (cfr. [1]), una decomposizione che è utile considerare anche per semigrupperi qualsiasi.

La decomposizione di S con le proprietà che determiniamo è caratteristica di un semigruppero regolare (§ 1).

Nel § 2 si precisa la struttura delle singole componenti della decomposizione considerata.

Utilizzando, per la parte riguardante i semigrupperi regolari, un lavoro di A. Gerente ([2]), centrato soprattutto sulla esistenza e dislocazione degli elementi invertibili ed accrescitivi in un semigruppero, possiamo descrivere la decomposizione considerata in tutti i casi possibili, secondo che vi siano, o non, unità in S (§ 3).

Alcune osservazioni su aspetti particolari chiudono il lavoro (§ 4). *Il lavoro sarà pubblicato nella sua completezza su «Acta Sci. Math.» (Szeged).*

Qui sono esposti i risultati principali, senza le dimostrazioni.

NOTAZIONI

Sono quelle usuali della teoria dei semigrupperi. Se A e B sono insiemi, $A \subset B$ significa che A è contenuto *propriamente* in B . Inoltre con « elemento accrescitivo » intenderemo « elemento accrescitivo sinistro ».

§ 1. Sia S un semigruppero arbitrario, senza annullatori, fuorché, eventualmente, lo zero, o (ipotesi che non comporta perdita in generalità). S ammette la decomposizione.

$$(1) \quad S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$$

(*) Lavoro svolto da F. Migliorini nell'ambito dell'attività della Sezione 4 del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.).

(**) Nella seduta del 23 giugno 1977.

ove

$$S_0 = \{a \in S / aS \subset S \text{ ed } \exists x \in S, x \neq 0 \text{ tale che } ax = 0\};$$

$$S_1 = \{a \in S / aS = S \text{ ed } \exists y \in S, y \neq 0 \text{ t.c. } ay = 0\};$$

$$S_2 = \{a \in S \setminus (S_0 \cup S_1) / aS \subset S \text{ ed } \exists x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2 \text{ t.c. } ax_1 = ax_2\}$$

$$S_3 = \{a \in S \setminus (S_0 \cup S_1) / aS = S \text{ ed } \exists y_1, y_2 \in S, y_1 \neq y_2 \text{ t.c. } ay_1 = ay_2\}$$

$$S_4 = \{a \in S \setminus (S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3) / aS \subset S\}$$

$$S_5 = \{a \in S \setminus (S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3) / aS = S\}.$$

Evidentemente le componenti S_i sono sottosemigruppi ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) e si ha $S_i \cap S_j = \emptyset$ per $i \neq j$.

Si può anche dimostrare che valgono le inclusioni

$$(2) \quad \begin{aligned} S_5 S_i &\subseteq S_i & , & \quad S_i S_5 \subseteq S_i & \quad (0 \leq i \leq 5) \\ S_4 S_3 &\subseteq S_2 & , & \quad S_4 S_2 \subseteq S_2 & , & \quad S_4 S_1 \subseteq S_0 & , & \quad S_4 S_0 \subseteq S_0 \\ S_2 S_3 &\subseteq S_2 & , & \quad S_0 S_1 \subseteq S_0. \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 1.1. S_5 è un gruppo destro.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che S_5 è cancellativo a sinistra e semplice a destra.

Evidentemente, ponendo

$$T_0 = \{a \in S / Sa \subset S \text{ ed } \exists x \in S, x \neq 0 \text{ t.c. } xa = 0\},$$

$$T_1 = \{a \in S / Sa = S \text{ ed } \exists y \in S, y \neq 0 \text{ t.c. } ya = 0\},$$

ecc. ...

si ottiene una analoga decomposizione di S in sottosemigruppi disgiunti,

$$(1') \quad S = T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5$$

ove tra i sottosemigruppi T_i , valgono relazioni (2') analoghe alle (2).

Poniamo, per comodità, $S_0 \cup S_2 = \bar{S}_2$ ed $S_1 \cup S_3 = \bar{S}_3$.

TEOREMA 1.2. $\bar{S}_2$ è un sottosemigruppo di S .

Ricordiamo che un elemento $a \in S$ si dice *accrescitivo* (sinistro) se esiste un sottinsieme $M \subset S$ tale che $aM = M$.

Portando l'attenzione sugli elementi accrescitivi (sinistri) di S , otteniamo il seguente

TEOREMA 1.3. $\bar{S}_3$ contiene, tutti e soli, gli elementi accrescitivi di S .

Di qui segue anche che $\bar{S}_3$ è un sottosemigruppo di S , perché gli elementi accrescitivi (sinistri) formano un sottosemigruppo.

Supporremo, nel seguito, che S sia un semigruppato regolare. Quindi per ogni $a \in S$ esiste un $x \in S$ tale che $a = axa$ ed $x = xax$ (x è un inverso di a).

Gli elementi ax , xa sono idempotenti. Inoltre, da $aS \supseteq axS \supseteq axaS = aS$, segue $axS = aS$ ed, analogamente, $xaS = xS$.

Se S è regolare si dimostra il seguente risultato

TEOREMA 1.4. *Gli inversi degli elementi di $\bar{S}_3$ sono in S_4 e gli inversi degli elementi di S_4 sono in $\bar{S}_3$.*

In particolare vale il

COROLLARIO 1.5. *Se S non contiene elementi accrescitivi ($\bar{S}_3 = \emptyset$) allora anche $S_4 = \emptyset$ e, viceversa, se $S_4 = \emptyset$ allora anche $\bar{S}_3 = \emptyset$.*

Ed ancora:

COROLLARIO 1.6. *Se S non ha unità sinistre, $\bar{S}_3 = \emptyset$ (e quindi $S_4 = \emptyset$).*

Dimostrazione. Se $a \in \bar{S}_3$ ed $x \in S_4$ è un inverso di a , ax è una unità sinistra di S .

Per quanto riguarda il sottosemigruppato $\bar{S}_2$ abbiamo

TEOREMA 1.7. *$\bar{S}_2$ è un semigruppato regolare (se $x \in \bar{S}_2$ ed y è un inverso di x , $y \in \bar{S}_2$).*

I risultati precedenti permettono di enunciare il seguente Teorema:

TEOREMA 1.8. *Un semigruppato S è regolare se e solo se ammette una decomposizione del tipo (1), cioè*

$$S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5,$$

ove:

- a) $\bar{S}_2$ è regolare;
- b) gli inversi degli elementi di $\bar{S}_3$ sono in S_4 , e viceversa.

Dimostrazione. La necessità delle condizioni è dimostrata da Proposizione 1.1, Teorema 1.4 e Teorema 1.7. La sufficienza segue ricordando che un gruppato destro è regolare (cfr. [3], Teorema IV. 3.9, p. 118).

§ 2. Sempre sotto l'ipotesi che S sia regolare, approfondiamo lo studio di $\bar{S}_2$, $\bar{S}_3$ ed S_4 .

In conseguenza dei Corollari 1.5 e Teorema 1.7 si ottiene il seguente:

TEOREMA 2.1. *Se S , regolare, non ha elementi accrescitivi (sinistri), allora si ha, posto $\bar{S}_2 = \bar{S}_2^1$ ed $S_5 = S_5^1$:*

$$S = \bar{S}_2^1 \cup S_5^1 \quad e, \quad se \quad \bar{S}_2^1 \quad non \quad contiene \quad elementi \quad accrescitivi,$$

$$\bar{S}_2^1 = \bar{S}_2^2 \cup S_5^2 \quad e, \quad se \quad \bar{S}_2^2 \quad non \quad contiene \quad elementi \quad accrescitivi,$$

$$\bar{S}_2^k = \bar{S}_2^{k+1} \cup S_5^{k+1} \quad e, \quad se \quad \bar{S}_2^{k+1} \quad non \quad contiene \quad elementi \quad accrescitivi,$$

ove gli $\bar{S}_2^k$ sono semigruppri regolari e gli S_5^k sono gruppi destri, ed inoltre si ha

$$S_5^k S_5^j \subseteq S_5^k \quad (k \geq j)$$

$$S_5^j S_5^k = S_5^k \quad (k \geq j)$$

$$S_5^k \bar{S}_2^j = \bar{S}_2^j \quad (k \leq j)$$

$$\bar{S}_2^j S_5^k \subseteq \bar{S}_2^j \quad (k \leq j).$$

Dimostrazione. Per induzione.

Ne segue anche:

COROLLARIO 2.2. *Se S e $\bar{S}_2^k$ ($k \geq 1$) sono semigruppri regolari senza elementi accrescitivi, allora S ha una decomposizione tra le seguenti:*

a) $S = (((\dots) \cup S_5^4) \cup S_5^3) \cup S_5^2) \cup S_5^1$ *ove il numero delle componenti è infinito;*

b) $S = \bar{S}_2^1 \cup (((\dots) \cup S_5^3) \cup S_5^2) \cup S_5^1$ *ove il numero delle componenti è infinito;*

c) $S = (((S_5^n \cup \dots) \cup S_5^3) \cup S_5^2) \cup S_5^1$ *ove il numero delle componenti è n ;*

d) $S = (((\bar{S}_2^m \cup S_5^m) \cup \dots) \cup S_5^3) \cup S_5^2) \cup S_5^1$ *ove il numero delle componenti è $(m + 1)$.*

Per quanto riguarda $\bar{S}_3$ ed S_4 si ha:

PROPOSIZIONE 2.3. *Siano $a, b \in \bar{S}_3$ ed x un inverso di a , y un inverso di b ($x, y \in S_4$); allora xy è un inverso di ba .*

PROPOSIZIONE 2.4. *Se $a, b \in S_4$ ed $x, y \in S$ sono tali che $a = axa$, $b = byb$, allora yx ed ab sono inversi.*

Siano

$$X_1 = \{x \in S_4 \mid x \text{ inverso di qualche } a \in S_1\} \text{ e}$$

$$X_3 = \{y \in S_4 \mid y \text{ inverso di qualche } b \in S_3\}.$$

Si ha $S_4 = X_1 \cup X_3$ ed inoltre:

COROLLARIO 2.5. X_1 e X_3 sono sottosemigruppri di S_4 .

Dimostrazione. La tesi è conseguenza immediata della Proposizione 2.3. La struttura di $\bar{S}_3$ ed S_4 è chiarita dal seguente Teorema.

TEOREMA 2.6. $\bar{S}_3$ ed S_4 sono unione di sottosemigruppri ciclici infiniti (ogni elemento di $\bar{S}_3$ ed S_4 genera un semigruppri ciclico infinito).

Infine, la situazione degli elementi accrescitivi nelle singole componenti di S è la seguente (cfr. anche [4], Cap. III, 5):

TEOREMA 2.7.

- 1) In $\bar{S}_3$ non vi sono elementi accrescitivi destri (per $\bar{S}_3$ stesso).
- 2) In S_4 non vi sono elementi accrescitivi sinistri (per S_4 stesso).
- 3) Se $I \in S$, $S_0 \cup S_2 \cup S_5 (\neq \emptyset)$ non contiene elementi accrescitivi ne' destri ne' sinistri (per se stesso).
- 4) S_5 non contiene elementi accrescitivi sinistri (per se stesso).

§ 3. Da un lavoro di Gerente ([2]) si può dedurre, abbastanza facilmente, quali decomposizioni del tipo (1) si presentano effettivamente, e in quali casi, per il semigruppone regolare S .

Per il Teorema 4 di [2] risulta conveniente distinguere, in S , i seguenti casi:

- 1) S non ha unità sinistre, nè unità destre;
- 2) S ha unità;
- 3) S ha unità solamente da un lato.

Possiamo supporre, considerando la decomposizione (1) costituita dai sottosemigruppone S_i , che le unità da un lato siano sinistre.

Ricordiamo anche che un idempotente e si dice $\mathcal{D}$ -primitivo se è minimale nell'insieme degli idempotenti di D_e (rispetto all'ordinamento usuale), ove D_e è la classe di equivalenza di e , in S , secondo $\mathcal{D}$, equivalenza di Green ([5], p. 47).

I risultati che si ottengono possono essere riassunti nel seguente

TEOREMA 3.1. *Sia S un semigruppone regolare. Allora si ha:*

- 1) se S non ha unità sinistre:

$$S_1 \cup S_3 = \emptyset \quad , \quad S_4 = \emptyset \quad , \quad S_5 = \emptyset ;$$

- 2) se S ha unità 1:

- a) se 1 è $\mathcal{D}$ -primitivo:

$$S_1 \cup S_3 = \emptyset \quad , \quad S_4 = \emptyset \quad , \quad S_5 = \emptyset ;$$

- b) se 1 non è $\mathcal{D}$ -primitivo:

$$S_1 \cup S_3 \neq \emptyset \quad , \quad S_4 \neq \emptyset \quad , \quad S_5 \neq \emptyset \quad , \quad S_0 \cup S_2 \neq \emptyset ;$$

- 3) se S ha unità sinistra e :

- a) se e è $\mathcal{D}$ -primitivo:

$$S_1 \cup S_3 = \emptyset \quad , \quad S_4 = \emptyset \quad , \quad S_5 \neq \emptyset ;$$

- b) se e non è $\mathcal{D}$ -primitivo:

$$S_1 \cup S_3 \neq \emptyset \quad , \quad S_4 \neq \emptyset \quad , \quad S_5 \neq \emptyset \quad , \quad S_0 \cup S_2 \neq \emptyset .$$

§ 4. Terminiamo con alcune osservazioni su questioni particolari, nell'ambito dello studio che ci siamo proposti.

Se $x \in S_4$, sia $B_x = \{a \in S \mid a \text{ inverso di } x\}$ ($B_x \subseteq \bar{S}_3$); e se $a \in \bar{S}_3$, sia $C_a = \{x \in S \mid x \text{ inverso di } a\}$ ($C_a \subseteq S_4$). Se $x \in S_4$ ed $a \in B_x$ ($a \in \bar{S}_3$), allora ax è unità sinistra, e , di S ($= aS$), cioè $ax = e$ (oppure $ax = \mathbf{1}$, eventualmente). Analogamente, per ogni $a \in \bar{S}_3$ si ha $ay = e'$ se $y \in C_a$ ove e' è un'unità sinistra di S (eventualmente $e' = \mathbf{1}$).

PROPOSIZIONE 4.1.

- 1) Per un qualsiasi elemento $x \in S_4$, B_x non è un sottosemigruppato di $\bar{S}_3$.
- 2) Per un qualsiasi elemento $a \in \bar{S}_3$, C_a non è un sottosemigruppato di S_4 .

Portiamo, infine, di nuovo l'attenzione sugli elementi accrescitivi di S (supponendo $\bar{S}_3 \neq \emptyset$). Un sottinsieme $M \subset S$ tale che esista un elemento $a \in S$ per cui $aM = S$ si dice *accrescibile*, a sinistra, mediante a .

Preso un elemento accrescitivo a ($\in \bar{S}_3$) vi possono essere più sottinsiemi accrescibili mediante a . È interessante notare che, per $a \in \bar{S}_3$, esiste sempre un sottinsieme M accrescibile mediante a tale che $M \subseteq S_0 \cup S_2 \cup S_4$ (cioè privo di elementi invertibili a destra).

Infatti vale la *Proposizione 4.2*.

Se $a \in \bar{S}_3$, $a(S_0 \cup S_2 \cup S_4) = S$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. SZÉP (1969) - *On the structure of finite semigroups*. DM 69-4, K. Marx Univ., Budapest.
- [2] A. GERENTE (1972) - *Elements inversibles et croissants dans un demi-groupe* « C. R. Acad. Sc. Paris », 274, ser. A, 1775-1778.
- [3] M. PETRICH - *Introduction to Semigroups*, Merrill Research and Lecture Series, Columbus (Ohio).
- [4] E. S. LJAPIN (1963) - *Semigroups* « Trans. Math. Mon. » (3).
- [5] A. H. CLIFFORD e G. B. PRESTON (1961) - *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, Providence, « Amer. Math. Soc. ».