Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Anna Luisa Gilotti, Luigi Serena

p—Iniettori nei gruppi finiti p-risolubili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.4, p. 423–427.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_4_423_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

Algebra. — *p-Iniettori nei gruppi finiti p-risolubili* (*). Nota di ANNA LUISA GILOTTI e LUIGI SERENA, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this Note the Authors study normally embedded subgroups of finite π-soluble groups using Fitting sets and generalize results of Anderson [3].

In alcuni recenti lavori, è stata portata l'attenzione sui sottogruppi p-normalmente immersi nei gruppi finiti risolubili, cioè quei sottogruppi V di un gruppo G godenti della proprietà: « Se V_p è un p-sottogruppo di Sylow di V, V_p è anche p-sottogruppo di Sylow della sua chiusura normale V_p^G in G ».

In [3] Anderson dà una condizione necessaria e sufficiente affinché un sottogruppo V di un gruppo risolubile G sia normalmente immerso in G, cioè p-normalmente immerso per ogni primo p che divide l'ordine di V. A tal fine, egli introduce la definizione di insieme di Fitting di un gruppo risolubile e di iniettore ad esso associato.

Volendo estendere i risultati di Anderson a classi più ampie di gruppi finiti, abbiamo introdotto la definizione di p-insieme di Fitting di un gruppo finito G. Relativamente ai p-insiemi di Fitting valgono ancora, in un gruppo finito qualunque, le proprietà di esistenza e coniugio degli iniettori. Sfruttando la proprietà di pronormalità degli iniettori, nella seconda parte di questa nota, abbiamo provato l'equivalenza tra la nozione di iniettore e di sottogruppo p-normalmente immerso nei gruppi p-risolubili.

Utilizzando tale risultato, nella terza parte, si estendono in modo naturale i risultati di Anderson alla classe dei gruppi π-risolubili.

1. Sia G un gruppo finito, e sia $\mathbf{F}_p$ una famiglia di p-sottogruppi di G godente delle proprietà:

1) Se $H \trianglelefteq S$, $S \in \mathbf{F}_p$ allora $H \in \mathbf{F}_p$;

2) Se $A, B \in \mathbf{F}_p$, e $A, B \trianglelefteq AB$ allora $AB \in \mathbf{F}_p$;

3) Se $S \in \mathbf{F}_p$, allora $S^x \in \mathbf{F}_p$ per ogni $x \in G$.

Una tale famiglia sarà chiamata un p-insieme di Fitting di G. Per un teorema di Wielandt [2] la famiglia $\mathbf{F}_p$ è chiusa rispetto alla generazione subnormale.

Se H è un sottogruppo di G, e $\mathbf{F}_p$ è un p-insieme di Fitting di G, allora la famiglia

$$\mathbf{F}_{p|H} = \{H \cap S, S \in F_p\}$$

è un p-insieme di Fitting di H. Infatti, essendo S un p-sottogruppo di G, $H \cap S$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 16 aprile 1977.

è subnormale in S e quindi $H \cap S \in \mathbf{F}_p$. Da ciò segue $K \in \mathbf{F}_p$ se $K \trianglelefteq H \cap S$ ed essendo $K \subseteq H$ è $K = H \cap K$. Siano ora $H \cap S$, $H \cap \bar{S} \in \mathbf{F}_{p|H}$, tali che $H \cap S$, $H \cap \bar{S} \trianglelefteq (H \cap S)(H \cap \bar{S}) = M$.

Allora $M \in \mathbf{F}_p$ ed essendo M contenuto in H si ha $M \in \mathbf{F}_{p|H}$.

Infine, se $x \in H$ e $H \cap S \in \mathbf{F}_{p|H}$, allora $(H \cap S)^x = H \cap S^x \in \mathbf{F}_{p|H}$.

DEFINIZIONE. 1.1. Sia $\mathbf{F}_p$ un p–insieme di Fitting di G, e sia V un elemento di $\mathbf{F}_p$. V si dirà un $\mathbf{F}_p$–iniettore di G se V è un elemento massimale di $\mathbf{F}_p$ e, comunque preso un sottogruppo subnormale N di G è $V \cap N$ $\mathbf{F}_{p|N}$–massimale in N.

DEFINIZIONE. 1.2. Un p–sottogruppo V di G si dice p–iniettore se esiste un p–insieme di Fitting $\mathbf{F}_p$ rispetto al quale V è $\mathbf{F}_p$–iniettore.

PROPOSIZIONE 1.3. *Sia* $\mathbf{F}_p$ *un* p*–insieme di Fitting di* G, *allora*:

1) *Gli* $\mathbf{F}_p$*–iniettori di* G *sono esattamente gli elementi massimali di* $\mathbf{F}_p$ *e sono tra loro coniugati.*

2) *Se* V *è un* $\mathbf{F}_p$*–iniettore e* P *è un* p*–sottogruppo di Sylow di* G *contenente* V, *allora* V *è debolmente chiuso in* P.

Dimostrazione. Siano V e $\bar{V}$ due elementi massimali distinti di $\mathbf{F}_p$. Allora non esiste un p–sottogruppo di Sylow P di G che li contiene entrambi. Infatti, se V e $\bar{V}$ fossero inclusi in P, allora $V, \bar{V} \trianglelefteq\trianglelefteq \langle V, \bar{V} \rangle \in \mathbf{F}_p$, contro l'ipotesi di massimalità di V e $\bar{V}$. Pertanto V e $\bar{V}$ sono contenuti in p–sottogruppi di Sylow distinti, siano essi P e $\bar{P}$. Se x è un elemento di G tale che $P^x = \bar{P}$, si ha anche $V^x \subseteq P^x = \bar{P}$. Onde, se V^x è diverso da $\bar{V}$, ripetendo il ragionamento precedente si contraddice la massimalità di $\bar{V}$ e V^x. Segue pertanto $\bar{V} = V^x$, cioè gli elementi massimali di $\mathbf{F}_p$ sono tra loro coniugati e ciascuno di essi è debolmente chiuso nel p–sottogruppo di Sylow che lo contiene.

Sia V $\mathbf{F}_p$–massimale in G, e sia N un sottogruppo subnormale di G. Supponiamo per assurdo che $V \cap N$ non sia $\mathbf{F}_{p|N}$–massimale in N. Esiste allora un sottogruppo $\mathbf{F}_{p|N}$–massimale Z tale che $V \cap N \subsetneqq Z$. Z sarà della forma $H \cap N$ con $H \in \mathbf{F}_p$. Ma è $H \subseteq V^x$ per x conveniente elemento di G, onde $Z = H \cap N \subseteq V^x \cap N$. Ma $V^x \cap N \in \mathbf{F}_{p|N}$, onde, per la massimalità di Z è $Z = V^x \cap N$. Sia $V \subseteq P$, $V^x \subseteq P^x$ con P e P^x p–sottogruppi di Sylow di G. $P \cap N$ e $P^x \cap N$, essendo p–sottogruppi di Sylow di N, sono coniugati in N, onde esiste $y \in N$ tale che $(P^x \cap N)^y = P \cap N$. Segue allora che $(V^x \cap N)^y = V^{xy} \cap N \subseteq P \cap N$. Essendo $V^{xy} \cap N \in \mathbf{F}_p$ e contenuto in P si ha che $V^{xy} \cap N \subseteq V$, visto che V è l'unico sottogruppo $\mathbf{F}_p$–massimale di P. Essendo anche $V^{xy} \cap N \subseteq N$, si ha $V^{xy} \cap N \subseteq V \cap N$. Ma ciò è assurdo perché $V^{xy} \cap N = (V^x \cap N)^y$ è $\mathbf{F}_{p|N}$–massimale in N al pari di $V^x \cap N$, mentre $V \cap N$ non lo è.

COROLLARIO 1.4. *Sia* V *un* p*–sottogruppo di* G, *allora* V *è un* p*–iniettore di* G *se e solo se la famiglia*

$$\mathbf{F}(V) = \{S, S \subseteq V^x, x \in G\}$$

è chiusa rispetto al prodotto normale.

Si ricorda che un sottogruppo H di G si dice pronormale in G se H e H^x sono coniugati in $< H, H^x >$ per ogni $x \in G$.

LEMMA 1.5 ([1]). *Un p–sottogruppo* H *di* G *e pronormale in* G *se e solo se è debolmente chiuso in ogni p–sottogruppo di Sylow che lo contiene.*

PROPOSIZIONE 1.6. *Se* V *è un p–iniettore di* G, *allora:*

(i) $N_G(V) \supseteq N_G(P)$ *dove* P *e un p–sottogruppo di Sylow di* G *contenente* V.

(ii) V *è pronormale in* G.

PROPOSIZIONE 1.7. *Sia* V *un p–iniettore di* G, *valgono allora le seguenti affermazioni:*

(i) *Se* H *è un sottogruppo di* G *contenente* V, *allora* V *è un p–iniettore di* H

(ii) *Se* N *è un sottogruppo normale di* G *allora* $V \cap N$ *è un p–iniettore di* G.

Dimostrazione (i) ovvia.

(ii) Si vede che la famiglia $\mathbf{F}(V \cap N) = \{S, S \subseteq (V \cap N)^x, x \in G\}$ è chiusa rispetto al prodotto normale. Infatti siano $A, B \in \mathbf{F}(V \cap N)$ e $A, B \trianglelefteq AB$. Essendo in particolare $A, B \in \mathbf{F}(V)$ è $AB \in \mathbf{F}(V)$; d'altronde $AB \subseteq N$, da cui segue che esiste $z \in G$ tale che $AB \subseteq V^z \cap N = (V \cap N)^z$.

2. In questa parte della Nota, si considerano i gruppi p–risolubili e si prova che un p–sottogruppo di G è p–normalmente immerso in G se e solo se è un p–iniettore di G.

LEMMA 2.1 ([1]). *Un sottogruppo* H *di* G *è normale in* G *se e solo se è contemporaneamente subnormale e pronormale in* G.

LEMMA 2.2. *Se* V *è un sottogruppo pronormale del gruppo* G *e* N *è un sottogruppo normale di* G, *allora* VN/N *è un sottogruppo pronormale di* G/N.

Dimostrazione Sia $N \trianglelefteq G$ e sia $(VN/N)^{xN}$ un coniugato di VN/N. Poiché V è pronormale in G, V e V^x sono coniugati in $< V, V^x >$. Esiste perciò $z \in < V, V^x > : V^z = V^x$. Pertanto zN è un elemento di $< V, V^x > N/N = < VN/N, (VN/N)^{xN} >$ tale che $(VN/N)^{zN} = (VN/N)^{xN}$.

TEOREMA 2.3. *Sia* G *un gruppo p–risolubile e* V *un suo p–sottogruppo godente della proprietà:*

α) $V \cap N$ *è pronormale in* G *per ogni sottogruppo normale* N *di* G.

Allora V *è p–normalmente immerso in* G.

Dimostrazione. Procediamo per induzione rispetto all'ordine di G. Se $O_{p'}(G) \neq \langle 1 \rangle$, allora $VO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ gode ancora della proprietà α) in $G/O_{p'}(G)$; infatti se $N/O_{p'}(G)$ è un sottogruppo normale di $G/O_{p'}(G)$, $VO_{p'}(G)/O_{p'}(G) \cap N/O_{p'}(G) = (VO_{p'}(G) \cap N)/O_{p'}(G) = ((V \cap N)\, O_{p'}(G))/O_{p'}(G)$, da cui segue essendo $V \cap N$ pronormale in G, $((V \cap N)\, O_{p'}(G))/O_{p'}(G)$ pronormale in $G/O_{p'}(G)$ per il Lemma 2.2. Per ipotesi d'induzione, $VO_{p'}(G)/$

$/O_{p'}(G)$ è p-sottogruppo di Sylow di $(VO_{p'}(G)/O_{p'}(G))^{G/O_{p'}(G)} = V^G O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$, onde V, per questioni di ordine, è p-sottogruppo di Sylow di V^G.

Se $O_{p'}(G) = \langle 1 \rangle$, deve essere $O_p(G) \neq \langle 1 \rangle$, essendo G p-risolubile. $V \cap O_p(G)$ è pronormale in G per ipotesi, ma è anche subnormale in G essendolo in $O_p(G)$. Segue dal Lemma 2.1 che $V \cap O_p(G)$ è normale in G. Pertanto, se $V \cap O_p(G) \neq \langle 1 \rangle$ il nocciolo V_G di V è anch'esso diverso dal sottogruppo identico. Onde, considerando G/V_G e applicando l'induzione, si ha che V/V_G è p-sottogruppo di Sylow di $(V/V_G)^{G/V_G} = V^G/V_G$; pertanto V è p-sottogruppo di Sylow di V_G come si voleva.

Se $V \cap O_p(G) = \langle 1 \rangle$, detto P un p-sottogruppo di Sylow di G contenente V, si ha V normale in P essendo V debolmente chiuso in P per il Lemma 1.5. Quindi $VO_p(G) = V \times O_p(G)$, cioè V centralizza $O_p(G)$. Essendo il gruppo G p-risolubile ed essendo $O_{p'}(G) = \langle 1 \rangle$, ([1]) $C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$. Segue pertanto $V = \langle 1 \rangle$.

TEOREMA 2.4. *Sia* G *un gruppo p-risolubile e sia* V *un suo p-sottogruppo. Allora* V *è p-normalmente immerso in* G *se e solo se* V *è un p-iniettore di* G.

Dimostrazione. Se V è p-normalmente immerso in G, V è p-sottogruppo di Sylow di V^G. Siano A, B $\in \mathbf{F}$, con $\mathbf{F} = \{S, S \subseteq V^x, x \in G\}$ e $A, B \trianglelefteq AB$. Essendo A e B p-gruppi, AB è ancora un p-sottogruppo di V^G, e quindi è contenuto in un p-sottogruppo di Sylow V^z di V^G. Pertanto V è un p-iniettore.

Se V è un p-iniettore, allora V gode della proprietà α) del Teorema 2.3, per la Proposizione 1.7 (ii) e per la Proposizione 1.6 (ii); pertanto V è p-normalmente immerso in G.

COROLLARIO 2.5. *Sia* G *un gruppo p-risolubile e* V *un suo p-sottogruppo. Allora* V *è un p-iniettore di* G *se e solo se è della forma* $V = P \cap N$, *dove* N *è un opportuno sottogruppo normale di* G, *e* P *un p-sottogruppo di Sylow di* G.

– Un controesempio –

È facile vedere che il Teorema 2.4 non può estendersi alla classe dei gruppi finiti.

Per esempio, sia G un gruppo semplice nel quale i sottogruppi di Sylow di ordine dispari sono ciclici, e il normalizzante di un'involuzione è di tipo diedrale. Allora G è isomorfo a PSL $(2, p)$ per qualche primo p ([4]).

Sia $p = 17$. I 3-sottogruppi di Sylow hanno ordine 9. Sia P_3 uno di essi; $\Omega_1(P_3)$ è un 3-iniettore proprio di G e chiaramente non è 3-normalmente immerso in G.

3.

DEFINIZIONE 3.1. Sia G un gruppo finito e sia V un suo sottogruppo. V si dice pre-iniettore di G se la famiglia

$$\mathbf{F}(V) = \{S, S \subseteq V^x, x \in G\}$$

è chiusa rispetto al prodotto normale.

PROPOSIZIONE 3.2. *Se* V *è un pre–iniettore e* V_p *è un suo p–sottogruppo di Sylow, allora* V_p *è un p–iniettore di* G.

Dimostrazione. Basterà provare che $\mathbf{F}(V_p) = \{S, S \subseteq V_p^x, x \in G\}$ è chiusa rispetto al prodotto normale.

Sia $A \subseteq V_p$, $B \subseteq V_p^x$ e siano $A, B \trianglelefteq AB$. Poiché $A \subseteq V$ e $B \subseteq V^x$, esiste $z \in G$ tale che $AB \subseteq V^z$. Essendo AB p–gruppo, AB è contenuto in qualche p–sottogruppo di Sylow V_p^* di V^z. Poiché V_p^z è p–sottogruppo di Sylow di V^z, esiste $y \in V^z$ tale che $(V_p^z)^y = V_p^*$ cioè AB è contenuto in un coniugato di V_p.

Ricordiamo la definizione:

Sia G un gruppo finito ed H un suo sottogruppo. H si dice normalmente immerso in G se è p–normalmente immerso per ogni primo p che divide l'ordine di H.

PROPOSIZIONE 3.3. *Sia* G *un gruppo* π*–risolubile e* V *un* π*–sottogruppo di* G. *Se* V *è normalmente immerso in* G, *allora* V *è un pre–iniettore.*

Dimostrazione. Siano A, B due sottogruppi di G contenuti rispettivamente in V e V^x con $x \in G$ e siano $A, B \trianglelefteq AB$. Vogliamo provare che $AB \subseteq V^z$ per qualche $z \in G$. Sia $M = AB$; essendo A e B π–gruppi, anche M lo è, quindi esiste un π–sottogruppo di Hall che contiene M. H è risolubile e pertanto la dimostrazione prosegue come nel lavoro di Anderson ([3]), considerando un sistema di Sylow di H che M riduce.

TEOREMA 3.4. *Sia* G *un gruppo* π*–risolubile e* V *un* π*–sottogruppo di* G. *Allora* V *è un pre–iniettore se e solo se* V *è normalmente immerso in* G.

Dimostrazione. Se V è un pre–iniettore, per la proposizione 3.2, V_p è un p–iniettore di G, quindi p–normalmente immerso in G per ogni p che divide $|V|$ per il Teorema 2.4. Se V è normalmente immerso allora V è un pre–iniettore per la Proposizione 3.3.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. GORENSTEIN (1968) – *Finite Groups*, Harper & Row.

[2] D. PASSMAN (1968) – *Permutation Groups*, W. A. Benjamin.

[3] W. ANDERSON (1976) – *Injectors in finite solvable groups* « Journal of Algebra », *36*, 333–338.

[4] M. SUZUKI (1955) – *On finite groups with cyclic Sylow subgroups for all odd primes*, « Amer. Journal Math. », *77*, 657–691.