Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maurizio Fattorosi-Barnaga, Luigi F. Mamone

Compatibilità ed equivalenze naturali di una topologia

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.2, p. 184–189.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_2_184_0>

Topologia. — *Compatibilità ed equivalenze naturali di una topologia.* Nota di MAURIZIO FATTOROSI–BARNABA (*) e LUIGI F. MAMONE, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We first extend, in the strongest possible way, a necessary condition for compatibility of a topology with an algebra obtained by the first author in a previous paper [14]: this extension is not yet sufficient for compatibility and so another approach to the characterization problem for compatibility is needed. An attempt in a new direction turns out to be successful but in an excessively general frame: in fact it leads to a new (as far as we know) characterization of continuity of a function between topological spaces.

1. INTRODUZIONE

Il presente lavoro prosegue lo studio iniziato in [14], di cui quindi si presuppone la lettura e si riprendono notazioni e terminologia, con una sola modifica: l'algebra $2^{\mathfrak{A}} = \langle 2^{A} ; F \rangle$, associata ad $\mathfrak{A} = \langle A ; F \rangle$, che in [14] veniva chiamata algebra isotipica delle parti di $\mathfrak{A}$, verrà qui detta *algebra di Frobenius* di $\mathfrak{A}$.

In [14] si mostrava, fra l'altro, che il fatto che l'equivalenza naturale su 2^{A} associata a $T \in \mathcal{C}_A$, Φ_T, fosse una congruenza dell'algebra di Frobenius di $\mathfrak{A}$ risultava essere una condizione necessaria, ma in generale non sufficiente, per la $\mathfrak{A}$–compatibilità di T.

Una prima osservazione che qui viene fatta è che tale condizione si può notevolmente rafforzare senza che tuttavia si riesca a raggiungere la sufficienza (vedi Teorema 1 e Corollario 1): si può anzi dire che finchè si rimanga nell'ambito di un'azione « interna », per così dire, alle equivalenze naturali di una fissata struttura algebrica (nel senso che le equivalenze naturali delle topologie su un'algebra risultino essere congruenze dell'algebra di Frobenius associata) la condizione del Corollario 1 sia la più forte possibile.

Il fatto che questa non sia sufficiente spinge a considerare un'azione « esterna » della struttura algebrica sulle equivalenze naturali (nel senso che le operazioni pongono legami *fra* queste, invece di agire *su* queste); in quest'ordine di idee si giunge sì ad una caratterizzazione della $\mathfrak{A}$–compatibilità di una topologia T (vedi Corollario 2) ma in un ambito estremamente generale, tanto da risultare di fatto una nuova (almeno per quanto ne sanno gli Autori) caratterizzazione della continuità di una funzione fra spazi topologici (vedi Teorema 2): nell'esposizione si è preferito seguire un ordine logico e quindi il Teorema 2 precede il Corollario 2.

È opinione degli Autori che una opportuna combinazione di azione « interna » ed « esterna » di una struttura algebrica sulle equivalenze naturali

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(**) Nella seduta del 12 febbraio 1977.

potrebbe condurre ad una caratterizzazione più soddisfacente della nozione di compatibilità.

Si è ritenuto, infine, fare cosa utile per il Lettore interessato a questi argomenti, fornendo una bibliografia abbastanza ampia sulla teoria delle algebre universali topologiche e questioni connesse, che contiene senz'altro tutti i riferimenti fondamentali anche se non ha, com'è ovvio, alcuna pretesa di essere pienamente esaustiva.

2. RISULTATI

Cominciamo col dimostrare un lemma, che estende un risultato già ottenuto in [24] per operazioni binarie.

LEMMA 1. *Sia* $f \in A^{(A^n)}$ *un'operazione* n*–aria su* A, *compatibile con una topologia* T *su* A *(ovvero* $f : \langle A^n ; T^{(n)} \rangle \to \langle A ; T \rangle$ *è continua). Allora, per ogni ordinale* α, *la corrispondente operazione* n*–aria sulla potenza* α*–ma di* A, $f : (A^\alpha)^n \to A$, *è compatibile con* $T^{(\alpha)}$ *(ovvero* $f : \langle (A^\alpha)^n, (T^{(\alpha)})^{(n)} \rangle \to \langle A ; T^{(\alpha)} \rangle$ *è continua).*

Dimostrazione. Di routine: accenniamo comunque i passaggi fondamentali. Se $\alpha = 0 = \varnothing$, $A^0 = 1 = \{0\} = \{\varnothing\}$ e $T^{(0)}$, avendo come base $T^0 = 1$, coincide con $2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = I_{A^0} = D_{A^0}$ ed è compatibile con ogni operazione finitaria su A^0 (vedi Proposizione in [14]), quindi con f.

Se $\alpha = m < \omega$, siano $p_i \in A^m$ $(0 \leq i < n)$ e $p = p_0 \cdots p_{n-1} f \in A$; detto W un aperto in $T^{(m)}$ su A^m tale che $p \in W$, poiché W è della forma $W = \bigcup_{j \in J} (Z_0^j \times \cdots \times Z_{m-1}^j)$ dove Z_k^j $(j \in J, 0 \leq k < m)$ sono aperti in T su A, si ha, per un certo $j \in J$, $p \in Z_0^j \times \cdots \times Z_{m-1}^j$. Allora $(kp_0) \cdots (kp_{n-1}) f = kp \in Z_k^j$ $(0 \leq k < m)$ e quindi esistono degli aperti in T su A, S_k^i $(0 \leq i < n, 0 \leq k < m)$, tali che $S_k^0 \times \cdots \times S_k^{n-1} f_* \subseteq Z_k^j$. Ponendo $V_i = S_0^i \times \cdots \times S_{m-1}^i$ $(0 \leq i < n)$ si ha che $p_i \in V_i$, aperto in $T^{(m)}$ su A^m, e, poiché f su A^m agisce componente per componente, si ha

$$V_0 \times \cdots \times V_{n-1} f_* = (S_0^0 \times \cdots \times S_{m-1}^0) \times \cdots \times (S_0^{n-1} \times \cdots \times S_{m-1}^{n-1}) f_* \subseteq$$
$$\subseteq (S_0^0 \times \cdots \times S_0^{n-1} f_*) \times \cdots \times (S_{m-1}^0 \times \cdots \times S_{m-1}^{n-1} f_*) \subseteq Z_0^j \times \cdots \times Z_{m-1}^j \subseteq W .$$

Se $\alpha \geq \omega$, si può ripetere la stessa dimostrazione con le modificazioni imposte dal fatto che la topologia prodotto (di Tichonov), nel caso infinito, è tale che $W = \bigcup_{j \in J} \left(\prod_{\delta < \alpha} Z_\delta^j \right)$ in cui si ha quasi ovunque (= eccettuato un numero finito di indici) $Z_\delta^j = A$; ciò comporta che trovati gli S_δ^i $(0 \leq i < n, \delta < \alpha)$, intorni aperti di δp_i, si debba definire la famiglia

$$\bar{S}_\delta^i = \begin{cases} S_\delta^i & \text{se } Z_\delta^j \neq A \\ A & \text{se } Z_\delta^j = A \end{cases} \qquad (\delta < \alpha);$$

che fornisce gli intorni aperti (in $T^{(\alpha)}$ su A^{α}) di p_i, $V_i = \prod_{\delta<\alpha} \bar{S}_{\delta}^{i}$, che consentono di raggiungere in modo analogo la conclusione desiderata.

TEOREMA 1. *Sia* $\mathfrak{A}$ *un'algebra (finitaria); se* $T \in \mathscr{T}_{\mathfrak{A}}$ *allora, per ogni ordinale* α, $T^{(\alpha)} \in \mathscr{T}_{\mathfrak{A}^{\alpha}}$.

COROLLARIO 1. *Sia* $\mathfrak{A}$ *un'algebra (finitaria); se* $T \in \mathscr{T}_{\mathfrak{A}}$ *allora, per ogni ordinale* α, $\Phi_{T^{(\alpha)}} \in \mathscr{C}\,[2^{(\mathfrak{A}^{\alpha})}]$.

Dimostrazione. L'asserto segue immediatamente dal precedente Teorema 1 e dal Teorema 1 di [14].

La condizione del Corollario 1, necessaria per la $\mathfrak{A}$–compatibilità, estende, nel modo più forte possibile, la analoga condizione del Teorema 1 di [14] (che si ritrova per $\alpha = 1$) e tuttavia non risulta ancora essere sufficiente, come mostra il seguente controesempio: sia R l'insieme dei numeri reali, $\mathfrak{R} = \langle R ; + \rangle$, T la topologia costituita da $\varnothing$, R, e da tutti i sottoinsiemi cofiniti di R (tali cioè che i loro complementari in R siano finiti). È pressoché ovvio che $T \notin \mathscr{T}_{\mathfrak{R}}$ e con facili calcoli ed argomentazioni di routine (che omettiamo per brevità) si constata che, per ogni ordinale α, $\Phi_{T^{(\alpha)}}$ è una congruenza di $2^{(\mathfrak{R}^{\alpha})}$.

Nasce allora spontaneamente la questione se un modo diverso – « esterno » nel senso chiarito nell'introduzione – di far agire la struttura algebrica sulle equivalenze naturali non consenta di raggiungere una caratterizzazione della compatibilità.

Ciò di fatto avviene, ma come riflesso di una caratterizzazione del concetto di continuità di una funzione fra spazi topologici in termini di equivalenze naturali. Questo è il contenuto del successivo Teorema 2, cui facciamo precedere alcuni cenni di terminologia: diremo che una funzione $f: A \to B$ è (T, T')-*continua* se tale è come funzione fra gli spazi topologici $\langle A ; T \rangle$ e $\langle B ; T' \rangle$ e che *adegua* Φ a Ψ ($\Phi \in \mathscr{E}(A)$, $\Psi \in \mathscr{E}(B)$) se $\Phi f_*^2 \subseteq \Psi$, ovvero se $(a, b) \in \Phi$ implica $(af, bf) \in \Psi$.

TEOREMA 2. *Siano* $\langle A ; T_A \rangle$, $\langle B ; T_B \rangle$ *due spazi topologici e sia* $f \in B^A$. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni*:

(i) $f: A \to B$ *è* (T_A, T_B)-*continua*

(ii) $f_*: 2^A \to 2^B$ *è* $(T_{\Phi_{T_A}}, T_{\Phi_{T_B}})$-*continua*

(iii) $f_*: 2^A \to 2^B$ *adegua* Φ_{T_A} *a* Φ_{T_B}.

Inoltre ciascuna delle (i), (ii), (iii) *implica in generale la*

(iv) $f: A \to B$ *adegua* $\Phi_{T_A}^*$ *a* $\Phi_{T_B}^*$.

e, se T_A, T_B *sono di clopen, allora* (i), (ii), (iii), (iv) *sono equivalenti*.

Dimostrazione. Dimostreremo che in generale (iii) $\leftrightarrow$ (i) $\to$ (iv); poi che, nell'ipotesi che T_A, T_B siano di clopen, (iv) $\to$ (iii): da ciò segue subito che (ii) $\leftrightarrow$ (iii), ricordando la Proposizione 1 di [15] (in particolare l'equivalenza (ii) $\leftrightarrow$ (iii) ivi dimostrata) e l'osservazione, già contenuta in [14], che $\Phi^*_{T_\Phi} = \Phi$.

(i) $\rightarrow$ (iii): siano $X, Y \subseteq A$ tali che $(X, Y) \in \Phi_{T_A}$; allora

$$Xf_* \subseteq (XK_{T_A})f_* = (YK_{T_A})f_* \subseteq (Yf_*)K_{T_B}$$

da cui

$$(Xf_*)K_{T_B} \subseteq (Yf_*)K_{T_B};$$

per simmetria si ottiene l'inclusione opposta, quindi $(Xf_*, Yf_*) \in \Phi_{T_B}$.

(iii) $\rightarrow$ (i): verifichiamo innanzitutto che, per ogni $a \in A$,

$$(1) \qquad (a^{\Phi^*_{T_A}})f_* \subseteq (af)^{\Phi^*_{T_B}}.$$

Infatti se $b \in (a^{\Phi^*_{T_A}})f_*$ allora esiste $c \in a^{\Phi^*_{T_A}}$ tale che $cf = b$; poiché $aK_{T_A} = cK_{T_A}$ allora $(\{a\}, \{c\}) \in \Phi_{T_A}$ e da (iii) segue che $(\{af\}, \{cf\}) = (\{af\}, \{b\}) \in \Phi_{T_B}$ cioè che $bK_{T_B} = (af)K_{T_B}$, ovvero che $b \in (af)^{\Phi^*_{T_B}}$.

Sia ora $X \subseteq A$ e si pensino le topologie come topologie di chiusi; segue dal lemma di [14] che $T_A \subseteq T_{\Phi^*_{T_A}}$, $T_B \subseteq T_{\Phi^*_{T_B}}$: quindi esiste $Y \subseteq A$ tale che $XK_{T_A} = Y^{\Phi^*_{T_A}} \subseteq YK_{T_A}$; d'altra parte da $XK_{T_A} \supseteq Y$ segue $XK_{T_A} \supseteq YK_{T_A}$ e quindi $(X, Y) \in \Phi_{T_A}$. L'ipotesi (iii) implica allora che $(Xf_*, Yf_*) \in \Phi_{T_B}$, cioè che $(Xf_*)K_{T_B} = (Yf_*)K_{T_B}$. Dalla (1) e dalle osservazioni fatte, segue allora che

$$\begin{aligned}(XK_{T_A})f_* &= (Y^{\Phi^*_{T_A}})f_* = (\cup\{b^{\Phi^*_{T_A}} : b \in Y\})f_* = \\ &= \cup\{(b^{\Phi^*_{T_A}})f_* : b \in Y\} \subseteq \cup\{(bf)^{\Phi^*_{T_B}} : b \in Y\} = \\ &= (Yf_*)^{\Phi^*_{T_B}} \subseteq (Yf_*)K_{T_B} = (Xf_*)K_{T_B}.\end{aligned}$$

(i) $\rightarrow$ (iv): segue immediatamente dal fatto che (i) $\rightarrow$ (iii) tenendo conto che f_* conserva i singletons e che $\Phi^*_{T_A}$ coincide, a meno dell'immersione canonica $a \rightarrow \{a\}$ di A in 2^A, con la restrizione di Φ_{T_A} ai singletons.

Se T_A, T_B sono di clopen allora (iv) $\rightarrow$ (iii): segue dalla Proposizione 1 di [15] che T_A, T_B sono topologie di equivalenza, $T_A = T_\Phi$ e $T_B = T_\Psi$; quindi $K_{T_A} = K_\Phi$ e $K_{T_B} = K_\Psi$. Si tratta allora di far vedere che, comunque si scelgano $X, Y \subseteq A$, $X^\Phi = Y^\Phi$ implica $(Xf_*)^\Psi = (Yf_*)^\Psi$, nell'ipotesi che, per ogni $x \in A$, $x^\Phi f_* \subseteq (xf)^\Psi$, ovvero che, per ogni $Z \subseteq A$, $Z^\Phi f_* \subseteq (Zf_*)^\Psi$, ovvero ancora che, per ogni $Z \subseteq A$, $(Z^\Phi f_*)^\Psi = (Zf_*)^\Psi$ (perché in generale, essendo $Z \subseteq Z^\Phi$, si ha $Zf_* \subseteq Z^\Phi f_*$ e quindi $(Zf_*)^\Psi \subseteq (Z^\Phi f_*)^\Psi$).

La dimostrazione a questo punto è immediata:

$$X^\Phi = Y^\Phi \quad \text{implica} \quad (Xf_*)^\Psi = (X^\Phi f_*)^\Psi = (Y^\Phi f_*)^\Psi = (Yf_*)^\Psi.$$

Si osservi che la implicazione (iv) $\rightarrow$ ((i) o (ii) o (iii)) non può essere vera in generale, come deriva per esempio dal fatto che esistono funzioni *non* continue fra spazi T_1 – caso in cui (iv) è verificata da ogni funzione – non discreti (uno spazio con topologia T_1 e di clopen è necessariamente discreto).

Si osservi altresì che il procedimento con cui si dimostra l'implicazione (iii) $\rightarrow$ (i), che è la sola parte veramente non banale della dimostrazione, è una generalizzazione del procedimento con cui viene dimostrato il Teorema 3 di [14].

COROLLARIO 2. *Sia* $\mathfrak{A} = \langle A ; F \rangle$ *un'algebra (finitaria) di tipo* τ *e sia* $T \in \mathscr{C}_A \cdot T \in \mathscr{C}_{\mathfrak{A}}$ *sse, per ogni* $\gamma < o(\tau)$, $(f_\gamma)_*$ *adegua* $\Phi_{T^{(n_\gamma)}}$ *a* Φ_T.

BIBLIOGRAFIA

Trattati di topologia generale.

[1] N. BOURBAKI (1971) – *Topologie générale* (Hermann).
[2] V. CHECCUCCI, A. TOGNOLI e E. VESENTINI (1968) – *Lezioni di topologia generale* (Feltrinelli).
[3] J. DUGUNDJI (1968) – *Topology* (Allyn and Bacon).
[4] J. L. KELLEY (1955) – *General Topology* (D. van Nostrand Co.).
[5] S. LIPSCHUTZ (1965) – *Theory and problems of general topology* (Schaum Publ. Co.).

Trattati di algebra universale.

[6] P.M. COHN (1965) – *Universal Algebra* (Harper & Row; trad. it.: Feltrinelli, 1971).
[7] M. FATTOROSI-BARNABA (1973) – *Elementi di algebra universale* (Bizzarri).
[8] G. GRÄTZER (1968) – *Universal Algebra* (D. van Nostrand Co.).

Algebre universali topologiche e questioni connesse

[9] B. BANASCHEWSKI (1974) – *Minimal topological algebras.* «Math. Ann.», *211*, 107–114.
[10] S. BULMAN-FLEMING (1971) – *Congruences topologies on universal algebras.* «Math. Z.», *119*, 287–289.
[11] M. S. BURGIN (1972) – *Free topological groups and universal algebras.* «Dokl. Akad. Nauk SSSR», *204* (1), 9–11; trad. ingl.: «Soviet Math. Dokl.», *13*, 1972, 561–564.
[12] M. S. BURGIN (1973) – *Topological algebras with continuous systems of operations.* «Dokl. Akad. Nauk SSSR», *213* (3), 505–508; trad. ingl.: «Soviet Math. Dokl.», *14*, 1973, 1711–1715.
[13] G. A. EDGAR (1973) – *The class of topological spaces is equationally definable,* «Alg. Univ.», *3*, 139–146.
[14] M. FATTOROSI-BARNABA (1976) – *Sulle topologie compatibili con una data algebra,* «Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.», serie VIII, *60*, 228–234.
[15] M. FATTOROSI-BARNABA e L. F. MAMONE – *Proprietà reticolari di certe classi di topologie,* «Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.», serie VIII, *60*, 793–797.
[16] K. GOLEMA (1965) – *Free products of compact general algebras.* «Coll. Math.», *13*, 165–166.
[17] W. HÄMISCH (1954) – *Über die topologie in der Algebra.* «Math. Z.», *60*, 458–487.
[18] J. HAGEMANN – *Foundations of universal topological algebras,* I (Technische Hochschule, Darmstadt, preprint n. 225).
[19] A. S. LIBER (1973) – *Free compact algebras.* «Mat. Sbornik», *91*, 133 (1), 109–133; trad. ingl.: «Math. USSR Sbornik,», *20*, 1973 (1), 119–143.

[20] A. S. LIBER (1973) – *On a problem of A. I. Mal'cev.* « Dokl. Akad. Nauk SSSR », *211*, 1050–1052; trad. ingl.: « Soviet Math. Dokl. », *14*, 1973 (4), 1167–1170.

[21] A. I. MAL'CEV (1954) – *On the general theory of algebraic systems.* « Mat. Sbornik », *35*, 77, 3–20; trad. ingl.: « Amer. Math. Soc. Transl. », *2*, 27, 1963, 125–142.

[22] A. I. MAL'CEV (1957) – *Free topological algebras.* « Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. », *21*, 171–198; trad. ingl.: « Amer. Math. Soc. Transl. », *1*, 17, 1961, 173–200.

[23] L. F. MAMONE – *Un problema inerente il reticolo delle topologie su una potenza cartesiana* (preprint).

[24] G. MUNI (1969) – *Topologie iniziali (finali) compatibili con leggi di composizione interne ed esterne.* « Ricerche Mat. », *18*, 141–164.

[25] S. ŚWIERCZKOWSKI (1964) – *Topologies in free algebras.* « Proc. London Math. Soc. », *3*, 14, 566–576.

[26] W. TAYLOR (1971) – *Some constructions of compact algebras.* « Ann. Math. Logic. », *3*, 395–435.

[27] W. TAYLOR – *Varieties of topological algebras* (preprint).