
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ANTONIO C. GRIOLI

**Un teorema di reciprocità per le microstrutture con
deformazioni finite**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 62 (1977), n.1, p. 45–50.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_1_45_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica dei continui. — *Un teorema di reciprocità per le microstrutture con deformazioni finite* (*). Nota di ANTONIO C. GRIOLI, presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — We state a criterion for existence of a stored-energy function from which we will derive the stress in the case of microstructures with finite deformations. The problem was examined by Truesdell in the case of classical continuous media and is connected to the possibility of an extension of the classical Betti theorem to the case of finite deformations.

Unlike what happens in the case of classical continuous media, we realise that the existence condition for a stored-energy function in the case of microstructure, involves also the stress, and precisely the part that characterizes the internal forces, but not the part concerning couples and hyperstress.

1. Dopo averne scritto le equazioni di campo, si stabilisce un criterio per l'esistenza di un potenziale termodinamico da cui derivi lo stress nel caso di una microstruttura capace di deformazioni finite.

La questione è già stata studiata da Truesdell ⁽¹⁾ nel caso dei continui classici ed è collegata alla possibilità di una estensione del classico teorema di Betti nel caso di deformazioni finite.

A differenza di quanto capita nel caso dei continui non orientati (continui classici), si riconosce che la condizione di esistenza di un'energia potenziale nel caso delle microstrutture (ed in particolare dei continui di Cosserat), fa intervenire esplicitamente lo stress, e precisamente quella sua parte che caratterizza le forze interne, ma non quella relativa alle coppie e all'iperstress.

2. Si consideri un continuo le cui trasformazioni siano caratterizzate da un campo di spostamenti u_r e da un campo di matrici γ_{rs} ⁽²⁾. Siano C e C^* la configurazione attuale ed una di riferimento, P e P^* punti corrispondenti le cui coordinate rispetto ad una terna trirettangola levogira siano espresse rispettivamente da x_r, x_r^* . La matrice γ_{rs} soddisfi alla condizione di regolarità ($\text{Det} \|\gamma_{rs}\| \neq 0$) per cui sia decomponibile nel prodotto di una deformazione pura E_{rs} ($E_{rs} = E_{sr}$) per una rotazione $R_{rs}: \gamma = RE$.

Denotando con la virgola la derivazione rispetto alle x_r^* , l'espressione lagrangiana della densità di lavoro delle forze interne nel passaggio dalla configurazione C ad una vicinissima $C + \Delta C$, può porsi nella forma ⁽³⁾:

$$(1) \quad \Delta L^{(i)} = I \{ \nu \Delta \eta + \beta^l \Delta P^l + \tau \Delta E + T^l \Delta E_{,l} \}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1976.

(1) Vedi [I].

(2) Per i preliminari cinematici vedi [II] e [III].

(3) Nella (1), al contrario che in [III] (4), non compare il fattore $1/D$ perché il suo secondo membro rappresenta la densità di lavoro in relazione all'unità di volume della configurazione di riferimento. Le matrici ν, β^l, τ, T^l denotano variabili di stress, ed è:

$$\beta_{rs}^l = -\beta_{sr}^l \quad \tau_{rs} = \tau_{sr} \quad T_{rs}^l = T_{sr}^l.$$

Per maggiori chiarimenti vedi [III].

con:

$$(2) \quad \eta = \alpha^{(T)} R \quad P^l = \frac{1}{2} R^{(T)} R_{,l} \quad \alpha = \|x_{r,s}\|$$

ove il simbolo $^{(T)}$ sta ad indicare il trasposto della matrice.

Tenuto conto di (2) e della:

$$\Delta R_{ir} = e_{ihk} R_{kr} \Delta \omega_h$$

con $\Delta \omega_h$ vettore infinitesimo, la (1) porge con un'integrazione per parti:

$$(3) \quad \begin{aligned} \Delta L^{(i)} = & - \int_{C^*} \{ (v_{rs} R_{hr})_{,s} \Delta x_h - [e_{ihk} v_{rs} R_{kr} x_{i,s} + \\ & + \frac{1}{2} e_{ihk} (\beta_{rs}^l R_{is} R_{kr})_{,l}] \Delta \omega_h + (-\tau_{rs} + T_{rs,l}^l) \Delta E_{sr} \} dC^* - \\ & - \int_{\sigma^*} (v_{rs} R_{ir} n_s \Delta x_i + \frac{1}{2} e_{ihk} \beta_{rs}^l R_{is} R_{kr} n_l \Delta \omega_h + T_{rs}^l n_l \Delta E_{sr}) d\sigma^*. \end{aligned}$$

ove con σ^* si intende la superficie del continuo nella configurazione di riferimento e con n_l la normale interna.

Assumo come espressione del lavoro delle forze interne nel passaggio da C a C + ΔC , la:

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta L^{(e)} = & \int_{C^*} \mu (F_h \Delta x_h + M_h \Delta \omega_h + M_{rs} \Delta E_{sr}) dC^* + \\ & + \int_{\sigma^*} (f_h \Delta x_h + m_h \Delta \omega_h + m_{rs} \Delta E_{sr}) d\sigma^* \end{aligned}$$

ove nelle forze F_h, f_h , nei momenti M_h, m_h e nelle iperforze rappresentate mediante le matrici M_{rs} e m_{rs} suppongo conglobato il contributo dovuto alle eventuali forze di inerzia. Da (3), (4) seguono immediatamente le equazioni di campo del continuo:

$$(5) \quad (v_{rs} R_{hr})_{,s} = \mu F_h \quad v_{rs} R_{hr} n_s = f_h$$

$$(6) \quad -e_{ihk} v_{rs} R_{kr} x_{i,s} + \frac{1}{2} e_{ihk} (\beta_{rs}^l R_{is} R_{kr})_{,l} = \mu M_h \quad \frac{1}{2} e_{ihk} \beta_{rs}^l R_{is} R_{kr} n_l = m_h$$

$$(7) \quad T_{rs,l}^l - \tau_{rs} = \mu M_{rs} \quad T_{rs}^l n_l = m_{rs}.$$

Dalle [III] (10), [III] (11), tenuto conto di [II] (33), e ricordando le note relazioni:

$$X_{rs} = \frac{K_{rl} x_{s,l}}{D}$$

$$\psi_{rs} = \frac{1}{D} \lambda_{rl} x_{s,l}$$

si ottiene il legame tra le matrici v e β^l e le classiche K (tensore di Piola-Kirchhoff) e λ :

$$(8) \quad \begin{aligned} K_{hs} &= v_{rs} R_{hr} \\ \lambda_{hl} &= \frac{1}{2} e_{ihk} \beta_{rs}^l R_{is} R_{kr}. \end{aligned}$$

Tenuto conto delle (8), le (5), (6) danno le note equazioni di campo valide per un continuo di Cosserat:

$$(5') \quad K_{hs,s} = \mu F_h \quad K_{hs} n_s = f_h$$

$$(6') \quad \lambda_{hl,l} - e_{ihk} x_{i,s} K_{ks} = \mu M_h \quad \lambda_{hl} n_l = m_h.$$

In definitiva le (5'), (6'), (7) sono le equazioni di campo valide per il continuo sin qui considerato, di cui farò uso nel seguito.

3. Si sovrapponga al continuo deformato nella configurazione C , una deformazione infinitesima ΔC mediante la sovrapposizione alla sollecitazione esterna $\Sigma (F_h, f_h, M_h, m_h, M_{rs}, m_{rs})$ già esistente di una sollecitazione infinitesima $\Delta \Sigma (\Delta F_h, \Delta f_h, \Delta M_h, \Delta m_h, \Delta M_{rs}, \Delta m_{rs})$. Da (5'), (6') e (7) si deducono immediatamente le equazioni che legano $\Delta \Sigma$ alle variazioni delle matrici η , P^t e E , caratteristiche di ΔC :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu \Delta F_h &= \left(\frac{\partial K_{hs}}{\partial \eta_{pq}} \Delta \eta_{pq} + \frac{\partial K_{hs}}{\partial P_{pq}^t} \Delta P_{pq}^t + \frac{\partial K_{hs}}{\partial E_{pq}} \Delta E_{pq} + \frac{\partial K_{hs}}{\partial E_{pq,t}} \Delta E_{pq,t} \right)_{,s} \\ \Delta f_h &= \left(\frac{\partial K_{hs}}{\partial \eta_{pq}} \Delta \eta_{pq} + \frac{\partial K_{hs}}{\partial P_{pq}^t} \Delta P_{pq}^t + \frac{\partial K_{hs}}{\partial E_{pq}} \Delta E_{pq} + \frac{\partial K_{hs}}{\partial E_{pq,t}} \Delta E_{pq,t} \right) n_s \end{aligned} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu \Delta M_h &= \left(\frac{\partial \lambda_{hl}}{\partial \eta_{pq}} \Delta \eta_{pq} + \frac{\partial \lambda_{hl}}{\partial P_{pq}^t} \Delta P_{pq}^t + \frac{\partial \lambda_{hl}}{\partial E_{pq}} \Delta E_{pq} + \frac{\partial \lambda_{hl}}{\partial E_{pq,t}} \Delta E_{pq,t} \right)_{,l} \\ &- e_{ihk} \left[\Delta x_{i,s} K_{ks} + x_{i,s} \left(\frac{\partial K_{ks}}{\partial \eta_{pq}} \Delta \eta_{pq} + \frac{\partial K_{ks}}{\partial P_{pq}^t} \Delta P_{pq}^t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial K_{ks}}{\partial E_{pq}} \Delta E_{pq} + \frac{\partial K_{ks}}{\partial E_{pq,t}} \Delta E_{pq,t} \right) \right] \\ \Delta m_h &= \left(\frac{\partial \lambda_{hl}}{\partial \eta_{pq}} \Delta \eta_{pq} + \frac{\partial \lambda_{hl}}{\partial P_{pq}^t} \Delta P_{pq}^t + \frac{\partial \lambda_{hl}}{\partial E_{pq}} \Delta E_{pq} + \frac{\partial \lambda_{hl}}{\partial E_{pq,t}} \Delta E_{pq,t} \right) n_l \end{aligned} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu \Delta M_{rs} &= \left(\frac{\partial T_{rs}^l}{\partial \eta_{pq}} \Delta \eta_{pq} + \frac{\partial T_{rs}^l}{\partial P_{pq}^t} \Delta P_{pq}^t + \frac{\partial T_{rs}^l}{\partial E_{pq}} \Delta E_{pq} + \frac{\partial T_{rs}^l}{\partial E_{pq,t}} \Delta E_{pq,t} \right)_{,l} \\ &- \left(\frac{\partial \tau_{rs}}{\partial \eta_{pq}} \Delta \eta_{pq} + \frac{\partial \tau_{rs}}{\partial P_{pq}^t} \Delta P_{pq}^t + \frac{\partial \tau_{rs}}{\partial E_{pq}} \Delta E_{pq} + \frac{\partial \tau_{rs}}{\partial E_{pq,t}} \Delta E_{pq,t} \right) \\ \Delta m_{rs} &= \left(\frac{\partial T_{rs}^l}{\partial \eta_{pq}} \Delta \eta_{pq} + \frac{\partial T_{rs}^l}{\partial P_{pq}^t} \Delta P_{pq}^t + \frac{\partial T_{rs}^l}{\partial E_{pq}} \Delta E_{pq} + \frac{\partial T_{rs}^l}{\partial E_{pq,t}} \Delta E_{pq,t} \right) n_l. \end{aligned} \right.$$

Si sovrapponga al continuo in C un'altra arbitraria deformazione infinitesima $\Delta C'$ ($\Delta \eta'$, $\Delta P'$, $\Delta E'$) mediante l'incremento $\Delta \Sigma'$ della sollecitazione esterna Σ . Il legame fra $\Delta \Sigma'$ ($\Delta F'_h$, $\Delta f'_h$, $\Delta M'_h$, $\Delta m'_h$, $\Delta M'_{rs}$, $\Delta m'_{rs}$) e $\Delta C'$ sarà identico a quello che lega $\Delta \Sigma$ e ΔC , dato dalle (9), (10), (11).

Fatte per brevità di scrittura le seguenti posizioni:

$$(12) \quad \Delta \Sigma \Delta C' = \int_{C^*} \mu (\Delta F_h \Delta x'_h + \Delta M_h \Delta \omega'_h + \Delta M_{rs} \Delta E'_{sr}) dC^* + \\ + \int_{\sigma^*} (\Delta f_h \Delta x'_h + \Delta m_h \Delta \omega'_h + \Delta m_{rs} \Delta E'_{sr}) d\sigma^*$$

$$(13) \quad \Delta \Sigma' \Delta C = \int_{C^*} \mu (\Delta F'_h \Delta x_h + \Delta M'_h \Delta \omega_h + \Delta M'_{rs} \Delta E_{sr}) dC^* + \\ + \int_{\sigma^*} (\Delta f'_h \Delta x_h + \Delta m'_h \Delta \omega_h + \Delta m'_{rs} \Delta E_{sr}) d\sigma^*$$

da (9), (10), (11), tenuto conto delle:

$$\Delta x_{r,s} + e_{lrs} x_{\sigma,s} \Delta \omega_l = \Delta \eta_{si} R_{ri} \\ e_{hrk} R_{hs} R_{kp} \Delta P_{\sigma p}^s = \Delta \omega_{r,s},$$

applicando il teorema della divergenza si ha:

$$(14) \quad \Delta \Sigma \Delta C' - \Delta \Sigma' \Delta C = - \int_{C^*} \left\{ \left(\frac{\partial K_{hs}}{\partial \eta_{pq}} R_{hi} - \frac{\partial K_{hp}}{\partial \eta_{si}} R_{hq} \right) \Delta \eta_{pq} \Delta \eta'_{si} + \right. \\ + \left(e_{rkh} \frac{\partial \lambda_{hs}}{\partial \eta_{pq}} R_{rs} R_{kp} - \frac{\partial K_{hp}}{\partial P_{\sigma p}^s} R_{hq} \right) (\Delta \eta_{pq} \Delta P_{\sigma p}^{'s} - \Delta \eta'_{pq} \Delta P_{\sigma p}^s) + \\ + \left(\frac{\partial \tau_{rs}}{\partial \eta_{pq}} - \frac{\partial K_{hp}}{\partial E_{rs}} R_{hq} \right) (\Delta \eta_{pq} \Delta E'_{rs} - \Delta \eta'_{pq} \Delta E_{rs}) + \\ + \left(\frac{\partial T_{rs}^i}{\partial \eta_{pq}} - \frac{\partial K_{hp}}{\partial E_{rs,i}} R_{hq} \right) (\Delta \eta_{pq} \Delta E'_{rs,i} - \Delta \eta'_{pq} \Delta E_{rs,i}) + \\ + e_{rkh} \left(\frac{\partial \lambda_{hs}}{\partial P_{pq}^t} R_{rs} R_{kp} - \frac{\partial \lambda_{ht}}{\partial P_{\sigma p}^s} R_{rp} R_{kq} \right) \Delta P_{pq}^t \Delta P_{\sigma p}^{'s} + \\ + \left(\frac{\partial \tau_{pq}}{\partial P_{\sigma p}^s} - e_{rkh} \frac{\partial \lambda_{hs}}{\partial E_{pq}} R_{rs} R_{kp} \right) (\Delta P_{\sigma p}^s \Delta E'_{pq} - \Delta P_{\sigma p}^{'s} \Delta E_{pq}) + \\ + \left(\frac{\partial T_{pq}^t}{\partial P_{\sigma p}^s} - e_{rkh} \frac{\partial \lambda_{hs}}{\partial E_{pq,t}} R_{rs} R_{kp} \right) (\Delta P_{\sigma p}^s \Delta E'_{pq,t} - \Delta P_{\sigma p}^{'s} \Delta E_{pq,t}) + \\ \left. + \left(\frac{\partial \tau_{rs}}{\partial E_{pq}} - \frac{\partial \tau_{pq}}{\partial E_{rs}} \right) \Delta E_{pq} \Delta E'_{rs} + \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial T_{rs}^l}{\partial E_{pq}} - \frac{\partial \tau_{pq}}{\partial E_{rs,l}} \right) \cdot (\Delta E_{pq} \Delta E'_{rs,l} - \Delta E'_{pq} \Delta E_{rs,l}) + \\
& + \left(\frac{\partial T_{rs}^l}{\partial E_{pq,t}} - \frac{\partial T_{pq}^t}{\partial E_{rs,l}} \right) \Delta E_{pq,t} \Delta E'_{rs,l} \Big\} dC^* - \\
& - \int_{C^*} e_{r\sigma} K_{\rho l} (\Delta x_{\sigma,l} \Delta \omega'_r - \Delta x'_{\sigma,l} \Delta \omega_r) dC^*.
\end{aligned}$$

Posto per brevità di scrittura:

$$\begin{aligned}
(15) \quad & K_{hs} R_{hi} = \zeta_1, \dots, \zeta_9, \quad e_{rhk} \lambda_{hs} R_{rs} R_{kp} = \zeta_{10}, \dots, \zeta_{36}, \\
& \tau_{rs} = \zeta_{37}, \dots, \zeta_{45}, \quad T_{rs}^l = \zeta_{46}, \dots, \zeta_{72}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(16) \quad & \eta_{pq} = \gamma_1, \dots, \gamma_9, \quad P_{\sigma\rho}^s = \gamma_{10}, \dots, \gamma_{36}, \\
& E_{rs} = \gamma_{37}, \dots, \gamma_{45}, \quad E_{pq,t} = \gamma_{46}, \dots, \gamma_{72}.
\end{aligned}$$

la (14) diviene:

$$\begin{aligned}
(17) \quad & \Delta \Sigma \Delta C' - \Delta \Sigma' \Delta C = \int_{C^*} \left(\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial y_\beta} - \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial y_\alpha} \right) \Delta y_\alpha \Delta y'_\beta dC^* - \\
& - \int_{C^*} e_{r\sigma} K_{\rho l} (\Delta x_{\sigma,l} \Delta \omega'_r - \Delta x'_{\sigma,l} \Delta \omega_r) dC^*
\end{aligned}$$

con $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 72$.

Da (17) si vede che l'esistenza di una funzione $V(y)$, tale che sia:

$$(18) \quad \zeta_\alpha = - \frac{\partial V}{\partial y_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 72)$$

equivale alla condizione che qualunque siano le Δy e $\Delta y'$ si abbia:

$$(19) \quad \Delta \Sigma \Delta C' - \Delta \Sigma' \Delta C = - \int_{C^*} e_{r\sigma} K_{\rho l} (\Delta x_{\sigma,l} \Delta \omega'_r - \Delta x'_{\sigma,l} \Delta \omega_r) dC^*.$$

Stanti le (15), (16), le (18) divengono:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} K_{hs} R_{hi} &= - \frac{\partial V}{\partial \eta_{hi}} \\ e_{rhk} \lambda_{hs} R_{rs} R_{kp} &= - \frac{\partial V}{\partial P_{\sigma\rho}^s} \\ \tau_{rs} &= - \frac{\partial V}{\partial E_{rs}} \\ T_{rs}^l &= - \frac{\partial V}{\partial E_{rs,l}} \end{aligned} \right.$$

Si conclude che condizione necessaria e sufficiente affinché le matrici di stress derivino da un potenziale, secondo le (20), è che il lavoro incrociato $\Delta\Sigma\Delta C' - \Delta\Sigma'\Delta C$ soddisfi la (19) qualunque siano le deformazioni infinitesime ΔC e $\Delta C'$.

Se il continuo è un continuo classico il secondo membro di (19) è sempre nullo e si ritrova il teorema di Betti, con:

$$K_{hi} = - \frac{\partial V}{\partial x_{i,h}}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [I] C. TRUESDELL (1963) - *The meaning of Betti's reciprocal theorem*, « Journal of research of the National Bureau of Standards, B. Mathematics and Mathematical Physics », 67B (2), April-June.
- [II] A. GRIOLI (1977) - *Sul principio di indifferenza materiale*, « Rend. Sem. Mat. », Università di Padova, 55.
- [III] A. GRIOLI (1977) - *Sullo stress e sulla deformazione di una microstruttura*, « Rend. Sem. Mat. », Università di Padova, 55.