Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Israel, Antonia Mendolia

Sull'ordine di un modulo finitamente generato e graduato su un anello di polinomi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.1, p. 1–8.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_1_1_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 gennaio 1977

Presiede il Presidente della Classe BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Sull'ordine di un modulo finitamente generato e graduato su un anello di polinomi.* Nota (*) di GIORGIO ISRAEL e ANTONIA MENDOLIA (**), presentata dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — This paper deals with the order of the graduate module $k[X_0, \cdots, X_n]/(f_1, \cdots, f_m)$, where $f_1, \cdots, f_m$ is a $k[X_0, \cdots, X_n]$-sequence of polynomials. The general form of Bézout's theorem is deduced from the calculation of this order. An alternative proof of this theorem is given, under the assumption that $n = m$.

1. PREMESSA

Sia k un campo, $A = k[X_0, \cdots, X_n]$ l'anello dei polinomi in $n + 1$ indeterminate e siano $f_1, \cdots, f_m$ $(m \leq n)$ dei polinomi omogenei di A, di gradi d_i $(1 \leq i \leq m)$. Supporremo inoltre che $f_1, \cdots, f_m$ sia una A–successione e cioè che sia soddisfatta la seguente condizione (v. [11], [4]):

(α) f_i non divide lo zero in $A/(f_0, \cdots, f_{i-1})A$ (ove $f_0 = 0$), per ogni i $(1 \leq i \leq m)$.

Dimostreremo che l'ordine del $k[X_0, \cdots, X_n]$–modulo

$$M = k[X_0, \cdots, X_n]/I,$$

ove I è l'ideale generato da $f_1, \cdots, f_m$, è uguale al prodotto dei gradi $d_1, d_2, \cdots, d_m$. Otterremo questo risultato costruendo il complesso di Koszul di A rispetto a $f_1, \cdots, f_m$, ovvero una risoluzione libera di M. Mostreremo quindi come da tale risultato possa facilmente ricavarsi la forma generale del teorema di

(*) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1976.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni del C.N.R.

Bézout. È noto che la dimostrazione della forma classica di tale teorema (corrispondente al caso in cui $n = m$) può essere ricondotta alla dimostrazione del fatto che la dimensione di M (come k–spazio vettoriale) è $d_1 d_2 \cdots d_n$; quest'ultima dimostrazione è stata data da Samuel nel caso in cui $n = 2$ (v. [9]). Qui (n. 6) generalizzeremo questo risultato al caso di n qualsiasi.

Si noti preliminarmente che, se vale la (α), l'altezza di I – che denoteremo col simbolo ht (I) (v. [11]) – è uguale ad m. Da ciò segue che l'ideale I è equidimensionale, cioè tutti gli ideali primi ad esso associati hanno uguale altezza: difatti, $k[X_0, \cdots, X_n]$ è un anello di Cohen–Macaulay e, in un siffatto anello ogni ideale proprio $\boldsymbol{a}$ generato da m elementi, ove $m = ht(\boldsymbol{a})$, è equidimensionale (v. [7], § 5.3). Viceversa, se $ht(\mathrm{I}) = m$, $f_1, \cdots, f_m$ è una A–successione. Deve essere difatti $ht((f_1, \cdots, f_i)) = i$ $(1 \leq i \leq m)$. Allora ogni ideale $(f_1, \cdots, f_i)$ è equidimensionale, cioè ogni ideale primo ad esso associato ha altezza i. Pertanto, se $i < m$, f_{i+1} non appartiene ad alcuno di questi ideali, altrimenti $(f_1, \cdots, f_{i+1})$ avrebbe altezza i. Ne segue che $(f_1, \cdots, f_i) : f_{i+1} = (f_1, \cdots, f_i)$, cioè $f_1, \cdots, f_m$ è una A–successione.

2. Calcolo della funzione caratteristica di Hilbert

Iniziamo col calcolare la funzione caratteristica di Hilbert di M, che denoteremo col simbolo $\chi(\mathrm{I}\,; q)$, e che esprime il massimo numero di forme di grado q in $k[X_0, \cdots, X_n]$ che sono linearmente indipendenti su k modulo I. Allo scopo costruiamo il complesso di Koszul $\mathrm{K}^{\mathrm{A}}(f) = \mathrm{K}^{\mathrm{A}}(f_1, \cdots, f_m)$ di A rispetto a $f_1, \cdots, f_m$ (v. [3], [9], [11]). Questo complesso è notoriamente definito al seguente modo: se $m = 1$, si pone $\mathrm{K}_p^{\mathrm{A}}(f) = 0$, se $p = 0, 1$; si hanno inoltre gli isomorfismi $\mathrm{K}_1^{\mathrm{A}}(f) \cong \mathrm{K}_0^{\mathrm{A}}(f) \cong \mathrm{A}$. Fissiamo un isomorfismo di A in $\mathrm{K}_1^{\mathrm{A}}(f)$ e sia e l'immagine di 1 in questo isomorfismo; si definisce allora il morfismo bordo $\partial_1 : \mathrm{K}_1^{\mathrm{A}}(f) \to \mathrm{K}_0^{\mathrm{A}}(f)$, ponendo $\partial_1(ae) = af$ $(a \in \mathrm{A})$. In generale, si pone: $\mathrm{K}^{\mathrm{A}}(f) = \mathrm{K}^{\mathrm{A}}(f_1) \otimes_{\mathrm{A}} \cdots \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}^{\mathrm{A}}(f_m)$. Se denotiamo con e_i l'immagine di 1 nell'isomorfismo $\mathrm{K}_1^{\mathrm{A}}(f_i) \to \mathrm{K}_0^{\mathrm{A}}(f_i)$ $(1 \leq i \leq m)$, si ha che $\mathrm{K}_p^{\mathrm{A}}(f)$ è un A–modulo libero generato da $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m)$ ed è isomorfo al prodotto esterno $\Lambda^p(\mathrm{A}^m)$. Il morfismo bordo $\partial_p : \mathrm{K}_p^{\mathrm{A}}(f) \to \mathrm{K}_{p-1}^{\mathrm{A}}(f)$ è dato dalla formula:

$$\partial_p(a \otimes e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) = \sum_{s-1}^{p} (-1)^{s-1} (f_{i_s} a) \otimes (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{i_s} \otimes \cdots \otimes e_{ip})$$

ove il simbolo ^ indica che e_{i_s} deve essere omesso.

Nel nostro caso, essendo $f_1, \cdots, f_m$ una A–successione, il complesso di Koszul è aciclico e precisamente, per i moduli di omologia $\mathrm{H}_p^{\mathrm{A}}(f) \cong \mathrm{Tor}_p(\mathrm{M}, k)$, si ha che:

$$\mathrm{H}_p^{\mathrm{A}}(f) = 0, \qquad \text{se } p \geq 1$$

$$\mathrm{H}_0^{\mathrm{A}}(f) = \mathrm{M} \qquad \text{(v. [11], Prop. 2 e 3, Cap. IV–2).}$$

Se prolunghiamo il complesso di Koszul con l'omomorfismo naturale $K_0^A(f) \to M$, otteniamo una risoluzione libera di M. Si noti che, sotto le nostre ipotesi, tale risoluzione deve arrestarsi dopo $n+1$ passi; deve aversi cioè che $K_p^A(f) = 0$, per $p > m$ (v. [13], Teor. 44, Cap. VII). In conclusione, si ha la risoluzione:

$$0 \to F_m \to F_{m-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

ove $F_p = K_p^A(f)$, $(0 \leq p \leq m)$.

Passiamo ora al calcolo esplicito della funzione caratteristica. $K_1^A(f)$ è isomorfo alla somma diretta di m copie di A; precisamente $K_1^A(f) \cong \bigoplus_{1 \leq i \leq m} Ae_i$, ove $\partial_1(e_i) = f_i$. Si noti che e_i è un generatore di grado d_i su A.

$K_2^A(f)$ è isomorfo a $\bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} A(e_{i_1} \otimes e_{i_2})$; si noti che i generatori (che sono in numero di $\binom{m}{2}$) hanno gradi $d_{i_1} + d_{i_2}$ $(1 \leq i_1 < i_2 \leq m)$.

In generale, $K_p^A(f) \cong \bigoplus_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} A(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p})$, ove i generatori (che sono in numero di $\binom{m}{p}$) hanno gradi $d_{i_1} + \cdots + d_{i_p}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m)$.

Sia q un intero tale che $q \geq d_1 + \cdots + d_m$. Consideriamo il k-spazio vettoriale $F_p^{(q)}$ degli elementi di grado q di F_p. Si ha allora che

$$\dim_k F_p^{(q)} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} \binom{n + q - d_{i_1} - \cdots - d_{i_p}}{n}.$$

Pertanto:

$$\chi(I, q) = \dim_k M^{(q)} = \dim_k F_0^{(q)} - \dim_k F_1^{(q)} + \cdots + (-1)^m \dim_k F_m^{(q)} =$$

$$= \binom{q+n}{n} - \sum_{i=1} \binom{q + n - d_i}{n} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} \binom{q + n - d_{i_1} - d_{i_2}}{n} +$$

$$+ \cdots + (-1)^m \binom{q + n - d_1 - \cdots - d_m}{n}$$

OSSERVAZIONE. Si può constatare facilmente che l'espressione soprascritta di $\chi(I; q)$ fornisce il coefficiente di Y^q nello sviluppo in serie di potenze della Y, della funzione:

$$(1 - Y^{d_1})(1 - Y^{d_2}) \cdots (1 - Y^{d_m})/(1 - Y)^{n+1}.$$

3. IL METODO DELLE SIZIGIE

Il calcolo della funzione caratteristica di Hilbert può effettuarsi, in modo sostanzialmente equivalente a quello già esposto, con il metodo classico delle catene di sizigie. In generale, se M è un $k[X_0, \cdots, X_n]$-modulo, sia $\{x_i\}_{i \in I}$ un sistema di elementi omogenei che generano M su $A = k[X_0, \cdots, X_n]$ e sia F (M) il modulo libero generato su A da $\{x_i\}_{i \in I}$. Si possono allora considerare le relazioni $\Sigma a_i x_i = 0$ (ove $a_i \neq 0$ per un numero finito di indici).

I sistemi $\{a_i\}_{i \in I}$ che verificano le relazioni anzidette, sono detti *sizigie* di M e il modulo da essi formato è detto *modulo delle sizigie* S (M) di M. S (M) è generato dalla sizigie $\{a_i\}_{i \in I}$ tali che a_i sia omogeneo e gli $x_i\, a_i$ abbiano lo stesso grado. Il grado degli $x_i\, a_i$ si dice *grado* del sistema di sizigie. Se S (M) non è libero si può ripetere l'operazione precedente costruendo il modulo libero F (S (M)) generato da S (M) e il modulo delle sizigie di S (M), cioè S (S (M)) = = S_2 (M). Cosi procedendo si costruisce una risoluzione libera:

$$\cdots \to F_n(M) \to \cdots \to F_1(M) \to F_0(M) \to M \to 0$$

(ove $F_i(M) = F(S_{i+1}(M))$, $i \geq 0$).

A norma di un teorema di Hilbert (v. [13], Teor. 43, Cap. VII), la risoluzione libera («catena di sizigie») si arresta al passo $(n+1)$-esimo cioè $S_n(M)$ è un A-modulo libero.

In [2] vengono date delle formule ricorsive che permettono di costruire esplicitamente le sizigie nel caso in cui il modulo M sia della forma $k[X_0, \cdots, X_n]/(f_1, \cdots, f_m)$, con le ipotesi da noi poste per $f_1, \cdots, f_m$. Precisamente, considerato l'ideale $(f_1, \cdots, f_s)$ $(1 \leq s \leq m)$, sia $V_1^{(s)}, \cdots, V_s^{(s)}$ una successione di matrici; le colonne della matrice $V_i^{(s)}$ contengono i generatori dell'i-esimo modulo delle sizigie di $k[X_0, \cdots, X_n]/(f_1, \cdots, f_s)$. Ovviamente $V_1^{(s)} = (f_1, \cdots, f_s)$. Allora una catena di sizigie per l'ideale $(f_1, \cdots, f_{s+1})$ è data dalle seguenti matrici:

$$V_1^{(s+1)} = (V_1^{(s)}, f_{s+1}) = (f_1, \cdots, f_{s+1}),$$

$$V_i^{(s+1)} = \left(\begin{array}{c|c} V_i^{(s)} & (-1)^{i-1} f_{s+1}\, U \\ \hline 0 & V_{i-1}^{(s)} \end{array}\right),$$

$$V_{s+1}^{(s+1)} = \left(\begin{array}{c} (-1)^s\, U \\ \hline V_s^{(s)} \end{array}\right),$$

ove U è la matrice unitaria.

Per determinare le dimensioni degli spazi vettoriali $F_i^{(q)}(M)$ formati dagli elementi di gradi q di $F_i(M)$, basta determinare i gradi delle sizigie corrispondenti. Un esame delle precedenti formule mostra come tali gradi (se d_i è il grado di f_i) siano:

$d_1, \cdots, d_m$, per le sizigie di $F_0(M)$;

$d_{i_1} + d_{i_2}$ $(1 \leq i_1 < i_2 \leq m)$, per le sizigie di $F_1(M)$;

. . . .

$d_{i_1} + \cdots + d_{i_p}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m)$, per le sizigie di $F_p(M)$.

Se $m = 1$, una catena di sizigie per (f) è data da (f) stesso.

Se $m = 2$, la catena è: $V_1^{(2)} = (f_1, f_2)$, $V_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$; i gradi dei sistemi sono rispettivamente d_1, d_2 e $d_1 + d_2$.

Se $m = 3$, la catena è:

$$V_1^{(3)} = (f_1, f_2, f_3) \quad , \quad V_2^{(3)} = \begin{pmatrix} -f_2 & -f_3 & 0 \\ f_1 & 0 & -f_3 \\ 0 & f_1 & f_2 \end{pmatrix} \quad , \quad V_3^{(3)} = \begin{pmatrix} f_3 \\ -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

i gradi dei rispettivi generatori sono d_1, d_2, d_3; $d_1 + d_2, d_1 + d_3, d_2 + d_3$; $d_1 + d_2 + d_3$.

Se $m = 4$, la catena è:

$$V_1^{(4)} = (f_1, f_2, f_3, f_4) \quad , \quad V^{(4)} = \left| \begin{matrix} -f_2 & -f_3 & 0 & f_4 & 0 & 0 \\ f_1 & 0 & -f_3 & 0 & f_4 & 0 \\ 0 & f_1 & f_2 & 0 & 0 & f_4 \\ 0 & 0 & 0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix} \right| ,$$

$$V_3^{(4)} = \left| \begin{matrix} f_3 & -f_4 & 0 & 0 \\ -f_2 & 0 & -f_4 & 0 \\ f_1 & 0 & 0 & -f_4 \\ 0 & -f_2 & -f_3 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & -f_3 \\ 0 & 0 & f_1 & f_2 \end{matrix} \right| \quad , \quad V_4^{(4)} = \left| \begin{matrix} -f_4 \\ f_3 \\ -f_2 \\ f_1 \end{matrix} \right| ,$$

e cosi via.

4. ORDINE DI M.

È noto che $\chi(\mathrm{I}; q)$, per q abbastanza grande, è un polinomio in q di grado pari a $\dim(\mathrm{M}) - 1$ (v. [7], Teor. 19 della sez. 7.10). Nel nostro caso $\dim(\mathrm{M}) = \dim(\mathrm{I}) = n + 1 - ht(\mathrm{I}) = n + 1 - m$. Pertanto si ha che

$$\chi(\mathrm{I}; q) = a_{n-m} \binom{q}{n-m} + a_{n-m-1} \binom{q}{n-m-1} + \cdots + a_1 \binom{q}{1} + a_0 =$$

$$= a_{n-m} \frac{q^{n-m}}{(n-m)!} + \cdots + a_0.$$

a_{n-m} si dice *ordine* di M e si denota col simbolo ord (M). Per calcolare ord (M) nel nostro caso, basta tenere conto dell'espressione di $\chi(\mathrm{I}; q)$ ricavata nel n. 2. Se pensiamo $\chi(\mathrm{I}; q)$ come un polinomio nelle $d_1, \cdots, d_m$, di grado m, si vede subito che esso è divisibile per il prodotto $d_1 \cdots d_m$ e quindi che $\chi(\mathrm{I}; q) = d_1 \cdots d_m q^{n-m}/(n-m)! + \cdots$. In conclusione, $\mathrm{ord}(\mathrm{M}) = d_1 \cdots d_m$. Si noti che, se $n = m$, $\chi(\mathrm{I}; q) = d_1 \cdots d_m$.

5. Ordine della varietà algebrica associata

Sia V^r una varietà proiettiva r–dimensionale dello spazio proiettivo $\mathbf{P}_k^n$, ove k è un campo algebricamente chiuso, e sia I il suo ideale omogeneo associato. Dicesi *ordine* di V, l'ordine del modulo $M = k[X_0, \cdots, X_n]/I$. Si noti che la funzione caratteristica $\chi(I; q)$ ha grado r. Per l'ordine di M si ha che: $\operatorname{ord}(M) = \sum_{p_i \in P} \operatorname{ord} k[X_0, \cdots, X_n]/\mathfrak{p}_i$, ove P è l'insieme degli ideali primi associati ad I, di dimensione uguale a dim (M).

È noto che l'ordine di una varietà proiettiva irriducibile V^r è uguale al numero dei punti d'intersezione, contati con le rispettive molteplicità, di V^r con una varietà lineare generica L^{n-r} di dimensione complementare. Per la dimostrazione di ciò si veda [9]. Supponiamo ora che V sia la varietà intersezione delle ipersuperficie di equazioni $f_1 = 0, \cdots, f_m = 0$, con l'ipotesi che $f_1, \cdots, f_m$ sia una A–successione. Tenendo conto della relazione soprascritta per ord (M), si ottiene la seguente forma generale del teorema di Bézout:

date m ipersuperficie proiettive di $\mathbf{P}_k^n$ di ordini $d_1, \cdots, d_m$ (cioè espresse da m forme $f_1, \cdots, f_m$ di gradi $d_1 \cdots d_m$), in posizione generica, la varietà intersezione ha ordine $d_1 \cdots d_m$.

Si noti che l'ipotesi che le ipersuperficie siano in posizione generica significa che $f_1, \cdots, f_m$ è una A–successione (v. [12], Lemma 1 del Cap. IV).

6. Il caso in cui $n = m$

La circostanza in cui $n = m$ corrisponde al teorema di Bézout nella sua formulazione classica. Precisamente: date n ipersuperficie proiettive di $\mathbf{P}_k^n$ in posizione generica esse si incontrano in un numero di punti uguale al prodotto dei loro ordini, purché si contino i punti con le rispettive molteplicità d'intersezione. Di questo teorema sono state date numerose dimostrazioni, fra cui tra le più recenti, è quella di Northcott ([6]), che è conseguita ridimostrando con altre tecniche una relazione provata in [8]. Un'altra dimostrazione è quella data da Samuel ([9]) nel caso $n = 2$, dimostrazione che si basa sul seguente risultato:

siano $V_1, \cdots, V_n$ n ipersuperficie proiettive di $\mathbf{P}_k^n$ in posizione generica e siano $f_1, \cdots, f_n$ le forme ad esse associate, costituenti una A–successione. Se tutti i punti d'intersezione sono a distanza finita (cioé, se si può supporre che appartengano a $\mathbf{P}_k^n - \{X_0 = 0\}$) allora il numero di questi punti d'intersezione, contati con le rispettive molteplicità, è uguale alla dimensione della k–algebra $k[X_1, \cdots, X_n]/(g_1, \cdots, g_n)$, ove g_i è il polinomio non omogeneo associato ad f_i, cioé $g_i = f_i(1, X_1, \cdots, X_n) = {}^a f_i$.

La dimostrazione del teorema di Bézout è pertanto ricondotta al seguente asserto algebrico: dati n polinomi $g_1, \cdots, g_n$ in $k[X_1, \cdots, X_n]$, di gradi rispettivi $d_1, \cdots, d_n$, se il risultante $R(\bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_n)$ delle forme $\bar{g}_i$ di grado d_i che si ottengono omettendo tutti i monomi di g_i di grado inferiore, è non nullo, allora $\dim k[X_1, \cdots, X_n]/(g_1, \cdots, g_n) = d_1 \cdots d_n$.

La dimostrazione di tale asserto è stata data da Samuel ([9]) nel caso $n = 2$. Vogliamo generalizzare tale dimostrazione al caso di n qualsiasi. Per fare ciò mostreremo che $\dim k[X_0, \cdots, X_n]/(g_1, \cdots, g_n) = \dim_k M^{(q)}$, per q abbastanza grande (basta supporre $q \geq d_1 + \cdots + d_n$), ove $M = k[X_0, \cdots, X_n]/(f_1, \cdots, f_n)$ ed f_i ($1 \leq i \leq n$) sono le forme omogenee associate alle g_i, cioè $f_i = X_0^s \cdot g_i (X_1/X_0, \cdots, X_n/X_0) = {}^h g_i$, ove s è il grado di f_i. Essendo $\dim_k M^{(q)} = d_1 \cdots d_n$, il teorema sarà completamente provato.

Consideriamo l'applicazione $\varphi : M \rightarrow M$ così definita: se $g \in k[X_0, \cdots, X_n]$ con $\bar{g}$ denotiamo la classe resto di g mod $(f_1, \cdots, f_n)$, allora $\varphi : \bar{g} \rightarrow \overline{X_0 g}$. Dimostriamo che φ è un monomorfismo. Si tratta ovviamente di un morfismo. Si tratta di mostrare che è iniettivo, cioè che, se $X_0 g = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$, allora esistono $a'_1, \cdots, a'_n \in k[X_0, \cdots, X_n]$ tali che $g = a'_1 f_1 + \cdots + a'_n f_n$.

Se $g \in k[X_0, \cdots, X_n]$, poniamo $g^{(0)} = g(0, X_1, \cdots, X_n)$. Sia $X_0 g = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$. Allora $a_1^{(0)} f_1^{(0)} + \cdots + a_n^{(0)} f_n^{(0)} = 0$. Il modulo delle n-ple $\{a_1^{(0)}, \cdots, a_n^{(0)}\}$ tali che $a_1^{(0)} f_1^{(0)} + \cdots + a_n^{(0)} f_n^{(0)} = 0$, è generato dalle n-ple (v. n. 3):

$$\begin{array}{l} (-f_2^{(0)}, \; f_1^{(0)}, \; 0, \cdots, 0) \\ (-f_3^{(0)}, \; 0, \; f_1^{(0)}, \cdots, 0) \\ (\;0, \; -f_3^{(0)}, \; f_2^{(0)}, \cdots, 0) \quad \text{ecc.} \end{array}$$

Pertanto si ha che:

$$\begin{cases} a_1^{(0)} = -f_2^{(0)} g \\ a_2^{(0)} = f_1^{(0)} g \\ a_i^{(0)} = 0 \quad (i = 1, 2), \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a_1^{(0)} = f_3^{(0)} g \\ a_3^{(0)} = f_1^{(0)} g \\ a_i^{(0)} = 0 \quad (i = 1, 3), \end{cases} \quad \text{ecc.}$$

Esaminiamo il primo caso (gli altri si trattano analogamente). Posto $b_1 = a_1 + g f_2$, $b_2 = a_2 - g f_1$, si ottiene: $b_1^{(0)} = a_1 + g^{(0)} f_2^{(0)} = -f_2^{(0)} g + g f_2^{(0)} = 0$; $b_2^{(0)} = a_2^{(0)} - g^{(0)} f_1^{(0)} = f_1^{(0)} g - f_1^{(0)} g = 0$.

Quindi $b_1 = X_0 a'_1$, $b_2 = X_0 a'_2$. Inoltre a_i ($i \neq 1, 2$) o è nullo, oppure è divisibile per X_0, in quanto $a_i^{(0)} = 0$. Pertanto $X_0 g = (b_1 - g f_2) f_1 + (b_2 + g f_1) f_2 + a_3 f_3 + \cdots + a_n f_n = X_0 a'_1 f_1 + X_0 a'_2 f_2 + \cdots + X_0 a'_n f_n$ (ove alcuni degli a_i possono essere nulli). In conclusione $g = a'_1 f_1 + \cdots + a'_n f_n$.

Sia $q \geq d_1 + \cdots + d_n$. Poniamo $d_1, \cdots, d_n = t$ e siano $b_1, \cdots, b_t \in A^{(q)}$ tali che le loro classi resto in $M^{(q)}$ formino una base di $M^{(q)}$. Sia $\bar{b}_i$ la classe resto di ${}^a b_i$ in ${}^a M = k[X_1, \cdots, X_n]/(g_1, \cdots, g_n)$. Se proviamo che $\bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_t$ è una base di ${}^a M$ su k, il teorema sarà completamente dimostrato.

Si osservi innanzitutto che $\dim_k M^{(q)} = \dim_k M^{(q+1)}$, per q abbastanza grande; pertanto φ può essere ristretto ad un isomorfismo $\varphi : M^{(q)} \rightarrow M^{(q+1)}$. Ne segue che le classi resto di $X_0^r b_1, \cdots, X_0^r b_t$ costituiscono una base di $M^{(q+r)}$ per ogni $r \geq 0$. Da ciò segue che i $\bar{b}_i$ costituiscono un sistema di generatori per ${}^a M$. Difatti, se $\bar{g} \in {}^a M$, ove $g \in k[X_1, \cdots, X_n]$, qualche $X_0^p ({}^h g)$ sarà una forma di grado $q + r$, di modo che $X_0^p ({}^h g) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i X_0^r b_i + c_1 f_1 + \cdots$ $\cdots + c_n f_n$, per opportuni $\alpha_i \in k$, $c_j \in k[X_0, \cdots, X_n]$. Allora $X_0^p ({}^{ah} g) =$ $= \sum_{i=1}^{t} \alpha_i {}^a b_i + {}^a f_1 {}^a c_1 + \cdots + {}^a f_n {}^a c_n$, di modo che $\bar{g} = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \bar{b}_i$.

Dimostriamo ora che i $\bar{b}_i$ sono linearmente indipendenti su k. Se $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i {}^a b_i = 0$, allora $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i {}^a b_i = c_1 {}^a f_1 + \cdots + c_n {}^a f_n$. Allora $X_0^r \sum_{i=1}^{t} \alpha_i b_i =$ $= X_0^{s_1} ({}^h c_1) f_1 + \cdots + X_0^{s_n} ({}^h c_n) f_n$ (con r, $s_1, \cdots, s_n$) opportuni). Ma allora $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i \overline{X_0^r b_i} = 0$ in $M^{(q+r)}$ e gli $\overline{X_0^r b_i}$ formano una base, per cui $\alpha_i = 0$ $(1 \leq i \leq t)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. CARTAN (1952) – *Extension du théorème des chaînes de syzygies*, «Univ. Roma, Rend. Ist. Naz. Alta Mat.», *11* (5).

[2] W. GRÖBNER (1949) – *Über die Syzygientheorie der polynomideale*, «Monatshefte für Mathematik», *53*.

[3] T. H. GULLIKSEN e G. LEVIN (1969) – *Homology of local rings*, «Queen's Papers on Pure and Applied Math.», *20*, Kingston, Ontario.

[4] G. ISRAEL (1969) – *Molteplicità e lunghezza. Moduli di Cohen–Macaulay*, «Rendiconti di Matematica», *2* (3–4), serie VI.

[5] K. IWASAWA (1949) – *Der Bézoutsche Satz im zweifach projektiven Räumen*, «Proc. Japan Acad.», *21*.

[6] D. G. NORTHCOTT (1952) – *On Integrally Closed Geometric Quotient Rings Extensions*, «Proc. London Math. Soc.», Third Series, *2*.

[7] D. G. NORTHCOTT (1968) – *Lessons on rings, modules and multiplicities*, Cambridge University Press.

[8] A. OSTROWSKI (1922) – *Über ein algebraisches Ubertragungspinzip*, «Abh. math. Semin Hamburg Univ.», Bd *1*.

[9] P. SAMUEL (1951) – *La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique*, «J. Math. pures et appl.», *30*.

[10] B. SEGRE (1972) – *Prodromi di geometria algebrica*, Ed. Cremonese, Roma.

[11] J. P. SERRE (1965) – *Algèbre locale. Multiplicités*, Springer–Verlag, «Lecture Notes in Math.», *11*, Berlin.

[12] I. R. SHAFAREVITCH (1974) – *Basic Algebraic Geometry*, Springer–Verlag, Verlin.

[13] O. ZARISKI e P. SAMUEL (1960) – *Commutative Algebra*, Vol. II, Van Nostrand, Princeton.