Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Margareta Ignat

Sulle superfici di discontinuità debole di ordine I in un plasma rarefatto radiativo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.5, p. 455–463.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_5_455_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Fisica matematica. — *Sulle superfici di discontinuità debole di ordine* 1 *in un plasma rarefatto radiativo*. Nota di MARGARETA IGNAT, presentata (*) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — The theory of the surfaces of discontinuity is used to study the non linear waves in a rarefied, anisotropic, radiative plasma, under the assumption that the CGL theory is applicable. The properties of both wave fronts and material surfaces are considered.

§ 1. INTRODUZIONE

Utilizzando la teoria delle superfici di discontinuità [1], [2], in questa Nota si studiano le onde nonlineari in un plasma nondissipativo, a elevata temperatura, in presenza di processi radiativi. Si considera un plasma molto rarefatto, praticamente privo di urti, sottoposto all'azione di un campo magnetico forte. In queste condizioni è valida la teoria CGL [3].

Le superfici di discontinuità nella fisica dei plasmi sono state esaminate in [4] per due tipi di plasma: uno descritto dalla MFD e l'altro descritto con l'approssimazione CGL. Ulteriormente, queste considerazioni sono state estese alla MFD *radiativa* [5]. In ciò che segue, intendiamo pure tener conto degli effetti radiativi però per un plasma CGL.

Partendo nel § 2 dalle condizioni di compatibilità dinamica (II), che risultano dal sistema (I), vengono dedotte le proprietà dei fronti d'onda (§ 3 e § 4) e delle superfici materiali di discontinuità (§ 5).

In questo modo si mostra che per un plasma CGL radiativo sussistono: fronti d'onda di Alfvén, lenti e rapidi (i quali sono modificati per l'anisotropia del tensore delle pressioni) e anche un fronte d'onda radiativo. Per essi sono stati determinati le corrispondenti velocità di propagazione e i valori dei parametri di discontinuità.

Nel § 4 si fa l'analisi dei casi particolari: $B_n = 0$, $\mathbf{B}_t = 0$. Passando all'esame delle superfici materiali di discontinuità (§ 5) vengono discusse due alternative: $B_n = 0$ e $\vec{\lambda}_v = 0$.

§ 2. CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ PER UN PLASMA CGL RADIATIVO

La presenza di un campo magnetico intenso in un plasma molto rarefatto produce un'anisotropia della pressione. Un tale plasma anisotropo sarà descritto dal sistema Chew-Goldberger-Low. Per prendere in considerazione gli effetti radiativi (il flusso dell'energia di radiazione e la pressione di radiazione), al sistema CGL vengono aggiunte: l'equazione del trasporto radiativo,

(*) Nella seduta del 13 novembre 1976.

l'equazione dell'energia e quella di stato. Se il plasma in esame è non viscoso e non conduttore di calore, il sistema fondamentale di equazioni sarà

$$
(\mathrm{I})\qquad
\begin{aligned}
&\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \operatorname{grad} \overleftrightarrow{\mathrm{P}} - \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \mathrm{E}^{(\mathrm{R})} = 0 ,\\
&\frac{d\mathbf{B}}{dt} - (\mathbf{B}\cdot\nabla)\, \boldsymbol{v} + \mathbf{B}\cdot\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad ; \quad (\operatorname{div} \mathbf{B} = 0) ,\\
&\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 ,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{P}_{\parallel}\, \mathrm{B}^2}{\rho^3}\right) = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{P}_{\perp}}{\rho \mathrm{B}}\right) = 0 ,\\
&\overleftrightarrow{\mathrm{P}} = \mathrm{P}_{\perp} \overleftrightarrow{\mathrm{I}} + (\mathrm{P}_{\parallel} - \mathrm{P}_{\perp})\, \hat{\mathrm{B}} \otimes \hat{\mathrm{B}} ,\\
&\frac{\partial \mathrm{E}^{(\mathrm{R})}}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{q}^{(\mathrm{R})} = -\alpha\, (c\mathrm{E}^{(\mathrm{R})} - 4\,\sigma \mathrm{T}^4) ,\\
&\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{q}^{(\mathrm{R})}}{\partial t} + \frac{c}{3} \operatorname{grad} \mathrm{E}^{(\mathrm{R})} = -\alpha \boldsymbol{q}^{(\mathrm{R})} ,\\
&\rho \mathrm{T} \frac{d\mathrm{S}}{dt} + \frac{4}{3}\, \mathrm{E}^{(\mathrm{R})} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad} \mathrm{E}^{(\mathrm{R})} = \alpha\, (c\mathrm{E}^{(\mathrm{R})} - 4\,\sigma \mathrm{T}^4) ,\\
&\mathrm{T} = \mathrm{T}\, (\rho\, , \mathrm{S}) ,
\end{aligned}
$$

dove: ρ – è la densità, $\boldsymbol{v}$ – è il campo della velocità, $\mathbf{B}$ – l'induzione magnetica e $\hat{\mathrm{B}}$ – il suo versore, $\overleftrightarrow{\mathrm{P}}$ – il tensore delle pressioni ($\mathrm{P}_{\parallel}$ e $\mathrm{P}_{\perp}$ essendo la pressione parallelamente e ortogonalmente a $\mathbf{B}$); $\otimes$ – è il simbolo di prodotto tensoriale, $\overleftrightarrow{\mathrm{I}}$ – è il tensore unità, μ – la permeabilità magnetica, c – la velocità della luce, T – la temperatura assoluta, S – l'entropia, α – il coefficiente di assorbimento, σ – la costante di Stefan–Boltzmann, $\boldsymbol{q}^{(\mathrm{R})}$ – il vettore del flusso di calore radiativo, $\mathrm{E}^{(\mathrm{R})}$ – la densità dell'energia di radiazione.

Per poter studiare i fronti d'onda compatibili col sistema (I) e le modificazioni introdotte dagli effetti radiativi, richiamiamo alcune ben note nozioni della teoria delle onde nonlineari in un plasma.

Sia $\Sigma(t)$ una superficie mobile nel plasma, $\boldsymbol{n}$ – il versore normale a Σ, « a » – la velocità di avanzamento di Σ nella direzione di $\boldsymbol{n}$ e $u = a - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$, la velocità locale di propagazione di Σ. Sia pure $f(\boldsymbol{r}\, , t)$ una funzione scalare qualsiasi dal sistema (I). Diremo che Σ è una superficie di discontinuità debole di ordine 1 per « f », se attraverso Σ « f » resta continua, ma almeno una delle sue derivate di ordine 1 è discontinua. La superficie di discontinuità si chiama *fronte d'onda* se $u \neq 0$ e *superficie materiale di discontinuità* se $u = 0$.

Indicando con parentesi quadre il salto di una grandezza attraverso Σ, sussistono le seguenti condizioni di compatibilità geometrico–cinematiche per le discontinuità

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right] = \lambda_f n_i \quad ; \quad \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right] = -a\lambda_f \quad ; \quad \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right] = -u\lambda_f ,$$

dove $\lambda_f = \left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]$ è il parametro di discontinuità relativo ad «f». Per il sistema (I) le corrispondenti condizioni di compatibilità dinamica assumano la forma

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned}
&\rho u\vec{\lambda}_v + \frac{B_n}{\mu}\vec{\lambda}_B - \frac{\boldsymbol{n}}{\mu}(\mathbf{B}\cdot\vec{\lambda}_B) - \lambda_\perp \boldsymbol{n} + \\
&\quad + (P_\perp - P_{||})\frac{B_n}{B^2}\left[\vec{\lambda}_B - 2(\mathbf{B}\cdot\vec{\lambda}_B)\frac{\mathbf{B}}{B^2}\right] + \\
&\quad + (\lambda_\perp - \lambda_{||})\frac{B_n \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\lambda_E^{(R)}}{3}\boldsymbol{n} = 0 ,\\
&u\vec{\lambda}_B + B_n\vec{\lambda}_v - \lambda_{vn}\mathbf{B} = 0 \quad ; \quad (\lambda_{Bn} = 0) ,\\
&u\lambda_\rho - \rho\lambda_{vn} = 0 ,\\
&\left[2P_{||}(\mathbf{B}\cdot\vec{\lambda}_B) + \lambda_{||}B^2 - \frac{3P_{||}}{\rho}B^2\lambda_\rho\right]u = 0 ,\\
&\left[\lambda_\perp B^2 - P_\perp\frac{\lambda_\rho B^2}{\rho} - P_\perp(\mathbf{B}\cdot\vec{\lambda}_B)\right]u = 0 ,\\
&-(u + v_n)\vec{\lambda}_E^{(R)} + \lambda_{q_n}^{(R)} = 0 ,\\
&-(u + v_n)\frac{1}{c}\vec{\lambda}_q^{(R)} + \frac{c}{3}\lambda_E^{(R)}\boldsymbol{n} = 0 ,\\
&-\rho u T\lambda_S + \frac{4}{3}E^{(R)}\lambda_{vn} + v_n\lambda_E^{(R)} = 0 ,\\
&\lambda_T = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S \lambda_\rho + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho \lambda_S ,
\end{aligned}$$

dove: $\vec{\lambda}_v, \vec{\lambda}_B, \lambda_\perp, \lambda_{||}, \lambda_E^{(R)}, \lambda_\rho, \cdots$ sono rispettivamente i parametri caratterizzanti le discontinuità delle derivate del primo ordine di: $\boldsymbol{v}, \mathbf{B}, P_\perp, P_{||}, E^{(R)}, \rho, \cdots$ Qui, e in ciò che segue, l'indice «n» o «t», denota la componente normale, o tangenziale di un vettore relative a Σ.

§ 3. FRONTI D'ONDA

Supposto $u \neq 0$, eliminando nelle (II.1)–(II.5) $\vec{\lambda}_B, \lambda_\rho, \lambda_{||}$ e $\lambda_\perp$ si perviene all'equazione

$$\text{(1)}\quad \left[u^2 - \frac{B_n^2}{\mu\rho} + (P_{||} - P_\perp)\frac{B_n^2}{B^2\rho}\right]\vec{\lambda}_v + \left[\frac{B_n}{\rho}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{P_\perp}{B^2}\right)\mathbf{B} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{B^2}{\mu} + 2P_\perp\right)\boldsymbol{n}\right]\lambda_{vn} +$$
$$+ \left[\frac{B_n}{\rho}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{P_\perp}{B^2}\right)\boldsymbol{n} + (P_\perp - 4P_{||})\frac{B_n^2\mathbf{B}}{B^4\rho}\right](\mathbf{B}\cdot\vec{\lambda}_v) - \frac{\lambda_E^{(R)}}{3\rho u}\boldsymbol{n} = 0 .$$

Tenendo poi conto che il caso $a = 0$ non presenta interesse, avremo $u + v_n \neq 0$, e dalle (II.6) e (II.7) si ricavano le relazioni

$$\vec{\lambda}_{qt}^{(R)} = 0 \,,$$

$$\left[\frac{c}{3(u+v_n)} - \frac{u+v_n}{c}\right]\lambda_{q_n}^{(R)} = 0 \,.$$

Dall'ultima si osservi che possono verificarsi due circostanze particolari:

a) $\vec{\lambda}_q^{(R)} = 0 \,, \lambda_E^{(R)} = 0$, cioè fronti d'onda attraverso cui le derivate prime del vettore di flusso di calore radiativo e della densità dell'energia di radiazione sono sempre continue;

b) $u + v_n = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}, \ \vec{\lambda}_{qt}^{(R)} = 0, \ \lambda_{qn}^{(R)}$–arbitrario, quando il vettore del flusso di calore radiativo è normale al fronte di onda.

Passiamo ora ad esaminare più in dettaglio questi casi.

a) Poiché $\vec{\lambda}_q^{(R)} = 0 \,, \lambda_E^{(R)} = 0$, le (II.8) e (II.9) diventano

$$\lambda_S = \frac{4\,E^{(R)}}{3\,\rho u T}\,\lambda_{vn} \,, \tag{2}$$

$$\lambda_T = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S \frac{\rho}{u} + \frac{4\,E^{(R)}}{3\,\rho u T}\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho\right]\lambda_{vn} \,. \tag{3}$$

Scrivendo l'equazione vettoriale (1) per le componenti si ottiene un sistema lineare omogeneo, l'annullamento del determinante dei coefficienti del quale porge

$$L\,\{L^2 + L\,[(\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{n}) + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{B})] + (\mathbf{B}\times\boldsymbol{n})\,(\mathbf{N}\times\mathbf{M})\} = 0 \,. \tag{4}$$

Qui, L , M , N , sono rispettivamente i termini dalle parentesi quadre in (1).

La condizione $L \equiv u^2 - \frac{B_n^2}{\mu\rho} + (P_{||} - P_{\perp})\,\frac{B_n^2}{\rho B^2} = 0$, che ci dà una prima possibilità di soddisfare (4), fornisce *il fronte d'onda di Alfvén* che ha la seguente velocità di propagazione

$$u_A^2 = \frac{B_n^2}{\mu\rho} + (P_\perp - P_{||})\,\frac{B_n^2}{\rho B^2} \,. \tag{5}$$

In questa relazione il primo termine rappresenta la ben nota velocità di Alfvén dalla MFD, mentre il secondo caratterizza la correzione introdotta dall'anisotropia della pressione. Il calcolo dei parametri di discontinuità si fa tenendo conto che, siccome $L = 0$, la (1) si riduce a

$$\mathbf{M}\lambda_{vn} + \mathbf{N}\,(\mathbf{B}\cdot\vec{\lambda}_v) = 0 \,,$$

da dove segue: $(\mathbf{B}_t\cdot\vec{\lambda}_{vt}) = 0$ cioè $\lambda_{v1}/\lambda_{v2} = - B_2/B_1$ e $\lambda_{vn} = 0$.

I valori per il resto dei parametri di discontinuità risultano dalle equazioni: (II.2)-(II.5), (2) e (3). Infatti, essi sono

$$(6)\quad \vec{\lambda}_B = -\frac{B_n}{u_A}\vec{\lambda}_{vt}\ ;\ \lambda_\rho = 0\ ;\ \lambda_{\parallel}\ \text{e}\ \lambda_\perp = 0\ ;\ \lambda_S = 0\ ;\ \lambda_T = 0\ ;\ \vec{\lambda}_q^{(R)} = 0\ ;\ \lambda_E^{(R)} = 0.$$

Scegliendo nella (4) l'alternativa $\{\cdots\} = 0$, si ottiene

$$(7)\qquad u^4 - u^2 R + Q = 0\,,$$

dove

$$(8)\qquad \begin{aligned} R &\equiv \frac{B^2}{\mu\rho} + \frac{2P_\perp}{\rho} + \frac{B_n^2}{B^2\rho}(2P_\parallel - P_\perp) > 0\,,\\ Q &\equiv \frac{B_n^2}{B^2\rho^2}\left[\frac{B_t^2}{B^2}(3P_\parallel^2 + 3P_\parallel P_\perp - P_\perp^2) + 3P_\parallel\left(\frac{B^2}{\mu} + P_\perp - P_\parallel\right)\right], \end{aligned}$$

sono le stesse come nell'approssimazione CGL nonradiative [4].

La (7) ci conduce ai *fronti d'onda lenti e rapidi* che si propagano con velocità

$$(9)\qquad u_{f,s}^2 = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4Q}}{2}\,.$$

Si osservi che queste espressioni sono soggette alla modificazione dovuta all'anisotropia della pressione, essendo pertanto diverse da quelle date dalla MFD. Adoperando l'equazione vettoriale (1), si trovano per le discontinuità delle derivate della velocità i valori

$$\lambda_{vn} = -\frac{LN_n\lambda_{v1}}{N_nM_1 - N_1(L+M_n)}\ ;\ \lambda_{v1}\text{-arbitrario}\ ;\ \lambda_{v2} = \frac{N_nM_2 - N_2(L+M_n)}{N_nM_1 - N_1(L+M_n)}\lambda_{v1}\,.$$

Da questi, per mezzo delle (II.2)-(II.5), (2) e (3), si stabiliscono subito tutti gli altri parametri di discontinuità: $\vec{\lambda}_B$, λ_ρ, $\lambda_\parallel$, $\lambda_\perp$, λ_S, λ_T.

Si vede così che i processi radiativi non cambiano la velocità di propagazione dei fronti d'onda: di Alfvén, lento e rapido, ma si manifestano per la comparsa delle discontinuità nelle derivate prime della temperatura e dell'entropia ($\lambda_S \neq 0$, $\lambda_T \neq 0$).

b) Siccome $u + v_n = \pm c/\sqrt{3}$, $\vec{\lambda}_{qt}^{(R)} = 0$, e $\lambda_{qn}^{(R)}$ resta del tutto arbitrario, siamo in presenza di un *fronte d'onda radiativo* [5], con velocità di propagazione data da

$$(10)\qquad u_R = \pm\frac{c}{\sqrt{3}} - v_n\,.$$

Allora, utilizzando (II.6) si trae

$$(11)\qquad \lambda_E^{(R)} = \pm\frac{\sqrt{3}}{c}\lambda_{qn}^{(R)},$$

mentre (II.8) e (II.9) diventano rispettivamente

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
\lambda_S &= \frac{4}{3}\,\frac{E^{(R)}}{\rho u_R T}\,\lambda_{vn} + \frac{v_n\sqrt{3}}{\rho u_R cT}\,\lambda_{qn}^{(R)}\,,\\
\lambda_T &= \left[\left(\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)_S \frac{\rho}{u_R} + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho \frac{4\,E^{(R)}}{3\,\rho u_R T}\right]\lambda_{vn} + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho \frac{v_n\sqrt{3}}{\rho u_R cT}\,\lambda_{qn}^{(R)}.
\end{aligned}
$$

Qui λ_{vn} discende dalla (1) avendo riguardo della (11). Il calcolo degli altri parametri di discontinuità procede in modo analogo a quello svolto nel caso precedente facendo uso delle relazioni (II.2)–(II.5).

Pertanto, se per un plasma rarefatto di alta temperatura, descritto dall'approssimazione CGL, si prendono in considerazione anche gli effetti radiativi, si mettono in evidenza: un fronte d'onda radiativo (colla velocità indipendente dall'anisotropia della pressione) e i fronti d'onda di Alfvén, lenti e rapidi colla velocità modificata solamente da questa anisotropia.

§ 4. Casi particolari

i) $B_n = 0$.

Se la propagazione avviene nella direzione perpendicolare al campo magnetico ($B_n = 0$), come si vede dalla (5), $u_A = 0$; dunque, in questo caso non abbiamo fronte d'onda di Alfvén, mentre l'equazione (1) si riduce alla

$$
(13)\qquad u^2\vec{\lambda}_v - \frac{1}{\rho}\left(\frac{B^2}{\mu} + 2\,P_\perp\right)\lambda_{vn}\,\boldsymbol{n} = \frac{\lambda_E^{(R)}}{3\,\rho u}\,\boldsymbol{n}\,.
$$

Per $\vec{\lambda}_q^{(R)} = 0\,,\ \lambda_E^{(R)} = 0$, esiste solo un fronte d'onda, di tipo rapido che possiede la velocità

$$
(14)\qquad u_f^2 = \frac{B^2}{\mu\rho} + \frac{2\,P_\perp}{\rho}\,.
$$

In questo caso, come risulta dalla (13): $\lambda_{vt} = 0$, mentre λ_{vn} resta qualunque. I valori dei parametri di discontinuità che si ricavano dalla (II.2)–(II.5), (2) e (3), sono

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
&\vec{\lambda}_B = \frac{\lambda_{vn}}{u_f}\,\mathbf{B} \quad ; \quad \lambda_\rho = \frac{\rho}{u_f}\,\lambda_{vn} \quad ; \quad \lambda_\parallel = \frac{P_\parallel}{u_f}\,\lambda_{vn} \quad ; \quad \lambda_\perp = \frac{P_\perp}{u_f}\,2\,\lambda_{vn}\,,\\
&\lambda_S = \frac{4\,E^{(R)}}{3\,\rho u_f T}\,\lambda_{vn} \quad ; \quad \lambda_T = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)_S \frac{\rho}{u_f} + \frac{4\,E^{(R)}}{3\,\rho u_f T}\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho\right]\lambda_{vn}\,.
\end{aligned}
$$

Quindi, per $B_n = 0$, la considerazione dei processi radiativi nella teoria CGL, come nella MFD, si manifesta per la presenza delle discontinuità nelle derivate di ordine 1 dell'entropia e della temperatura.

Per quanto concerne il fronte d'onda radiativo si abbia

$$
\vec{\lambda}_{qt}^{(R)} = 0 \quad ; \quad \lambda_{qn}^{(R)} = \text{arbitrario} \quad ; \quad \lambda_E^{(R)} = \pm\frac{\sqrt{3}}{c}\,\lambda_{qn}^{(R)}.
$$

Allora, la (13) fornisce la soluzione

$$\vec{\lambda}_{vt} = 0 \quad ; \quad \lambda_{vn} = \frac{\lambda_{qn}^{(R)}}{\sqrt{3}\,\rho u_R\, c\left(u_R^2 - \dfrac{B^2}{\mu\rho} - \dfrac{2P_\perp}{\rho}\right)}, \tag{16}$$

mentre le (II.2)–(II.5) porgono

$$\vec{\lambda}_B = \frac{\lambda_{qn}^{(R)}\,\mathbf{B}}{\sqrt{3}\,\rho u_R^2\, c\left(u_R^2 - \dfrac{B^2}{\mu\rho} - \dfrac{2P_\perp}{\rho}\right)} \quad ; \quad \lambda_\rho = \frac{\lambda_{qn}^{(R)}}{\sqrt{3}\,u_R^2\, c\left(u_R^2 - \dfrac{B^2}{\mu\rho} - \dfrac{2P_\perp}{\rho}\right)},$$

$$\lambda_{\parallel} = \frac{P_{\parallel}\,\lambda_{qn}^{(R)}}{\sqrt{3}\,\rho u_R^2\, c\left(u_R^2 - \dfrac{B^2}{\mu\rho} - \dfrac{2P_\perp}{\rho}\right)} \quad ; \quad \lambda_\perp = \frac{2P_\perp\,\lambda_{qn}^{(R)}}{\sqrt{3}\,\rho u_R^2\, c\left(u_R^2 - \dfrac{B^2}{\mu\rho} - \dfrac{2P_\perp}{\rho}\right)}.$$

Le espressioni di λ_S e λ_T si trovano dalla (12) sostituendo ivi il valore di λ_{vn} dalla (16_2).

ii) $\mathbf{B}_t = 0$.

Supponiamo ora di trovarci nel caso della propagazione nella direzione del campo magnetico ($\mathbf{B}_t = 0$). La velocità di propagazione del fronte d'onda radiativo resta invariata (formola (10)), mentre per gli altri fronti d'onda come risulta dalle (5), (8) e (9), abbiamo

$$u_A^2 = \frac{B^2}{\mu\rho} + \frac{P_\perp - P_{\parallel}}{\rho} \quad ; \quad u_{f,s}^2 = \begin{cases} u_A^2 \\ \dfrac{3P_{\parallel}}{\rho} \end{cases}$$

cosicché:

$$u_s^2 = \inf\left(u_A^2, \frac{3P_{\parallel}}{\rho}\right) \quad ; \quad u_f^2 = \sup\left(u_A^2, \frac{3P_{\parallel}}{\rho}\right).$$

Dunque:

Il fronte d'onda di Alfvén si caratterizza per gli stessi valori dei parametri di discontinuità come nel caso generale (le formole (6)); invece ora $\vec{\lambda}_{vt}$ resta arbitrario.

Il fronte d'onda di tipo acustico si propagherà con la velocità $u_a^2 = \dfrac{3P_{\parallel}}{\rho}$. Siccome $\vec{\lambda}_q^{(R)} = 0$, $\lambda_E^{(R)} = 0$, dalla (4) si deduce in questo caso: $\vec{\lambda}_{vt} = 0$, λ_{vn}– arbitrario e allora, dalle (II.2)–(II.5), (2) e (3) seguono successivamente

$$\vec{\lambda}_B = 0 \quad ; \quad \lambda_\rho = \frac{\rho}{u_a}\lambda_{vn} \quad ; \quad \lambda_{\parallel} = \frac{3P_{\parallel}}{u_a}\lambda_{vn} = \rho\lambda_{vn} \quad ; \quad \lambda_\perp = \frac{P_\perp}{u_a}\lambda_{vn},$$

$$\lambda_S = \frac{4E^{(R)}}{3\rho u_a T}\lambda_{vn} \quad ; \quad \lambda_T = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S \frac{\rho}{u_a} + \frac{4E^{(R)}}{3\rho u_a T}\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho\right]\lambda_{vn}.$$

Relativamente al *fronte d'onda radiativo*, dalla (1) discende

$$\vec{\lambda}_{vt} = 0 \quad ; \quad \lambda_{vn} = \frac{\lambda_{qn}^{(R)}}{\sqrt{3}\,\rho u_R\, c\left(u_R^2 - \dfrac{3P_{\|}}{\rho}\right)} .$$

La formula (11) resta valevole, però in (12) si deve sostituire l'espressione di λ_{vn}. Infine, dalle (II.2)-(II.5) si ottiene

$$\vec{\lambda}_B = 0 \quad ; \quad \lambda_\rho = \frac{\lambda_{qn}^{(R)}}{\sqrt{3}\, u_R^2\, c\left(u_R^2 - \dfrac{3P_{\|}}{\rho}\right)} ,$$

$$\lambda_{\|} = \frac{3P_{\|}}{u_R^2}\, \frac{\lambda_{qn}^{(R)}}{\sqrt{3}\,\rho c\left(u_R^2 - \dfrac{3P_{\|}}{\rho}\right)} \quad ; \quad \lambda_{\perp} = \frac{P_{\perp}}{u_R^2}\, \frac{\lambda_{qn}^{(R)}}{\sqrt{3}\,\rho c\left(u_R^2 - \dfrac{3P_{\|}}{\rho}\right)} .$$

§ 5. Superfici materiali di discontinuità

Studiamo ora il caso delle superfici materiali di discontinuità ($u = 0$). Quando $u = 0$ il sistema (I) diventa

$$\text{(III)} \quad \begin{aligned} &\frac{B_n}{\mu}\vec{\lambda}_B - \frac{\boldsymbol{n}}{\mu}(\mathbf{B}\cdot\vec{\lambda}_B) - \lambda_{\perp}\boldsymbol{n} + (P_{\perp} - P_{\|})\frac{B_n}{B^2}\left[\vec{\lambda}_B - \frac{2\mathbf{B}}{B}(\mathbf{B}\cdot\vec{\lambda}_B)\right] + \\ &\qquad + (\lambda_{\perp} - \lambda_{\|})\frac{B_n \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\lambda_E^{(R)}}{3}\boldsymbol{n} = 0 , \\ &B_n \vec{\lambda}_v = 0 \quad ; \quad \lambda_{vn} = 0 , \\ &- v_n \lambda_E^{(R)} + \lambda_{qn}^{(R)} = 0 , \\ &- \frac{v_n}{c}\vec{\lambda}_q^{(R)} + \frac{c}{3}\lambda_E^{(R)}\boldsymbol{n} = 0 , \\ &v_n \lambda_E^{(R)} = 0 , \\ &\lambda_T = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S \lambda_\rho + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho \lambda_S . \end{aligned}$$

In questo caso λ_ρ e λ_S restano qualunque. Dalle (III.2) e (III.6) si distinguono allora due possibilità.

a) $B_n = 0$, $\lambda_E^{(R)} = 0$, ciò che attesta l'esistenza, nel caso di un plasma rarefatto radiativo, delle superfici materiali di discontinuità tangenti al vettore di induzione magnetica. Su di esse $\vec{\lambda}_B$ e $\lambda_{\|}$ restano arbitrarie, accanto a λ_ρ e

λ_S e inoltre il sistema (III) implica

$$\frac{1}{\mu}(\mathbf{B}_t \cdot \vec{\lambda}_{Bt}) + \lambda_\perp = 0 ,$$

$$\lambda_{vn} = 0 \quad ; \quad \vec{\lambda}_q^{(R)} = 0 ,$$

$$\lambda_T = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S \lambda_\rho + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho \lambda_S .$$

Le eventuali discontinuità delle derivate della velocità hanno, per queste superfici materiali con $B_n = 0$, necessariamente un carattere trasversale ($\lambda_{vn} = 0$), al contrario di quanto accade nelle stesse condizioni per i fronti d'onda (§ 4 p.i), quando le discontinuità delle derivate della velocità devono avere carattere longitudinale ($\lambda_{vt} = 0$).

b) $\lambda_v = 0$, $\vec{\lambda}_E^{(R)} = 0$, λ_ρ e λ_S–arbitrari.

Si tratta ora di superfici materiali di discontinuità nontangenti al vettore di induzione magnetica, su di cui le derivate della velocità e quelle della densità dell'energia di radiazione sono continue. Tenendo presente che $\lambda_{Bn} = 0$, il sistema (III) si riduce a

$$\vec{\lambda}_{Bt}\left(\frac{B^2}{\mu} + P_\perp - P_\parallel\right)\left(\frac{B^4}{\mu} + 2(P_\perp - P_\parallel) B_n^2\right) =$$

$$= \mathbf{B}_t B^2 \left[2\lambda_\perp (P_\parallel - P_\perp) + (\lambda_\parallel - \lambda_\perp)\frac{B^2}{\mu}\right],$$

$$\vec{\lambda}_q^{(R)} = 0 \quad ; \quad \lambda_T = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S \lambda_\rho + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho \lambda_S .$$

Dalla prima equazione si vede che si ha $\vec{\lambda}_{Bt} = 0$, cioè $\vec{\lambda}_B = 0$, soltanto se la superficie materiale è normale al vettore di induzione magnetica ($\mathbf{B}_t = 0$).

BIBLIOGRAFIA

[1] C. AGOSTINELLI (1966) – *Magnetofluidodinamica*, Ed. Cremonese, Roma.

[2] A. JEFFREY (1966) – *Magnetohydrodynamics*, Oliver and Boyd, London.

[3] G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER e F. E. LOW (1956) – *The Boltzmann equation and the one fluid hydromagnetic equation in the absence of particle collisions*, « Proc. Roy Soc. », *A 236*, 112–118.

[4] G. MATTEI (1972) – *Superfici di discontinuità in fisica dei plasmi*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », *26*, 437–461.

[5] G. MATTEI (1974) – *Radiative magnetogasdynamics. Basic equations and non-linear wave propagation*, « Boll. U.M.I. », *4* (10), 150–173.