Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Stefano Marchiafava, Giuliano Romani

Ancora sulle classi di Stiefel—Whitney dei fibrati quaternionali generalizzati

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.5, p. 438–447.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_5_438_0>

Topologia algebrica. — *Ancora sulle classi di Stiefel–Whitney dei fibrati quaternionali generalizzati* (*) (**). Nota (***) di STEFANO MARCHIAFAVA e GIULIANO ROMANI, presentata dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — Founding on the consideration of the inclusion $(\mathbf{Z}_2)^{n+2} \to \mathrm{Sp}(n) \cdot \mathrm{Sp}(1)$ we attain to determine the explicit expression of the Stiefel–Whitney classes of the universal quaternionic generalized fiber bundle by means of a simple system of generators (algebraically independent).

Sia G un gruppo di Lie compatto; $\xi_G : E_G \to B_G$ il fibrato universale di fibra G (E_G spazio universale, B_G spazio classificante).

Dato un omomorfismo di gruppi di Lie, $\alpha : H \to G$, sia $\alpha_B : B_H \to B_G$ l'applicazione indotta tra i rispettivi classificanti e $\alpha_B^* : H^*(B_G, \Gamma) \to H^*(B_H, \Gamma)$ (Γ = fissato anello dei coefficienti) l'omomorfismo indotto tra le coomologie di tali spazi.

Fissiamo l'attenzione sulla coomologia mod. 2 ($\Gamma = \mathbf{Z}_2$). Sia $Q \cong (\mathbf{Z}_2)^k$ un sottogruppo massimale in G tra i sottogruppi del tipo $\mathbf{Z}_2 \times \cdots \times \mathbf{Z}_2$, e $\rho : Q \to G$ l'inclusione di Q in G.

È noto che quando $\rho_B^* : H^*(B_G, \mathbf{Z}_2) \to H^*(B_Q, \mathbf{Z}_2)$ è iniettivo (1) (come nel caso dei principali gruppi classici $SO(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, etc.), rappresentandosi $H^*(B_G, \mathbf{Z}_2)$ biunivocamente in una sottoalgebra dell'algebra di polinomi $H^*(B_Q, \mathbf{Z}_2) \equiv \mathbf{Z}_2[x_1, \cdots, x_k]$, $x_i \in H^1(B_Q, \mathbf{Z}_2)$ ($i = 1, \cdots, k$), è possibile ottenere informazioni sulla struttura di $H^*(B_G, \mathbf{Z}_2)$ (generatori, relazioni tra generatori, ecc.) facendo uso di relazioni e proprietà conosciute come valide per i polinomi.

Si supponga ora assegnato un omomorfismo $\beta : G \to SO(m)$ (in particolare, una immersione) e sia $'\xi_G$ il fibrato, con fibra $SO(m)$ e base B_G estensione reale di ξ_G mediante β. Consideriamo le classi di Stiefel–Whitney del fibrato $'\xi_G : W_r \in H^r(B_G, \mathbf{Z}_2)$, e le loro immagini $\rho_B^* W_r \in H^r(B_Q, \mathbf{Z}_2)$. Se βQ appartiene ad un sottogruppo massimale del tipo $\mathbf{Z}_2 \times \cdots \times \mathbf{Z}_2$ di $SO(m)$, una nota proposizione (2) permette di rappresentare le $\rho_B^* W_r$ mediante espressioni in opportune classi di coomologia $\omega_i \in H^1(B_Q, \mathbf{Z}_2)$ (i cosiddetti 2–pesi di β). E, quando si sappia che ρ_B^* è un monomorfismo, ci si potrà servire di dette espressioni per rappresentare le classi W_r mediante gli elementi di un prefissato sistema di generatori per $H^*(B_G, \mathbf{Z}_2)$.

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R., nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni.

(**) I risultati presentati in questa Nota sono stati oggetto di una breve comunicazione al X Congresso dell'U.M.I. (Cagliari–Alghero, 22–28 settembre 1975).

(***) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1976.

(1) E sotto opportune condizioni; cfr. [1], [2].

(2) Cfr. [2], p. 496.

Ciò premesso, nel presente lavoro, seguendo l'ordine di idee sopra indicato, perveniamo a determinare esplicitamente le classi di Stiefel–Whitney del fibrato quaternionale generalizzato universale (e quindi di ogni fibrato quaternionale generalizzato). Accenniamo qui di seguito rapidamente le successive tappe delle nostre considerazioni.

Sia ξ_G, con $G = \mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$ (3), il fibrato quaternionale generalizzato universale. Consideriamo l'inclusione $\zeta_n : \tilde{Q}(n) \to \mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$ di un sottogruppo $\tilde{Q}(n) \cong (\mathbf{Z}_2)^{n+2}$ massimale tra i sottogruppi del tipo $\mathbf{Z}_2 \times \cdots \times \mathbf{Z}_2$ (individuato a meno di coniugio) e l'immersione $\beta_n : \mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{SO}(4n)$.

In [5] si è mostrato che $H^*(B_{\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)}, \mathbf{Z}_2)$ è un anello di polinomi $\mathbf{Z}_2[\varepsilon_2, \varepsilon_3, W_4, \cdots, W_{4n}]$ generato da opportune classi $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ di dimensione rispettivamente 2, 3 e dalle classi di Stiefel–Whitney $W_4, \cdots W_{4n}$, di dimensione multipla di 4 del fibrato ${}'\xi_{\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)}$ estensione reale del fibrato universale $\xi_{\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)}$ mediante l'omomorfismo β_n.

Giovandoci di tale descrizione per $H^*(B_{\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)}, \mathbf{Z}_2)$ (e di altri risultati ottenuti nel citato lavoro) stabiliamo che l'omomorfismo $(\zeta_n)_B^*$ è inettivo, dandone altresì una descrizione completa in termini di generatori.

Applicando poi all'omomorfismo β_n una proposizione sopra ricordata e utilizzando l'iniettività di $(\zeta_n)_B^*$ otteniamo appunto le espressioni esplicite delle classi di Stiefel–Whitney del fibrato universale mediante il considerato sistema di generatori di $H^*(B_{\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)}, \mathbf{Z}_2)$.

1. CONVENZIONI

Sia $\mathbf{Q}$ l'algebra dei quaternioni e $\{i_0 = 1, i_1 = i, i_2 = j, i_3 = k\}$ una fissata base normale di $\mathbf{Q}$, verificante le note relazioni

$$i_\nu^2 = -1 \quad , \quad i_\nu i_\mu = -i_\mu i_\nu \qquad (\nu, \mu = 1, 2, 3; \nu \neq \mu).$$

Sia $\mathrm{Sp}(n)$ il *gruppo unitario quaternionale*, costituito dalle matrici hermitiane quaternionali

$$A = (A_\beta^\alpha)\,(A_\beta^\alpha \in \mathbf{Q}; \alpha, \beta = 1, \cdots, n; \bar{A}^t = A^{-1}).$$

$\mathrm{Sp}(1)$ coincide con il gruppo moltiplicativo dei quaternioni $q = q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3$ di norma unitaria $(q\bar{q} \equiv q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1)$.

È ben noto (4) che, identificato $\mathbf{R}^3$ con lo spazio $\hat{\mathbf{Q}}$ dei quaternioni immaginari puri $\underline{x} = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3$ (sottospazio di $\mathbf{Q}$ con base $\{i_1, i_2, i_3\}$), si ha un isomorfismo tra il quoziente di $\mathrm{Sp}(1)$ modulo il sottogruppo $\mathbf{Z}_2 = \{-1, 1\}$ ed $\mathrm{SO}(3)$

$$\pi : \mathrm{Sp}(1)/\mathbf{Z}_2 \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(3)$$

(3) Cfr. per esempio [5].

(4) Cfr. ad esempio C. Chevalley [3], p. 38.

associando all'elemento $\pm q$ di $\mathrm{Sp}(1)/\mathbf{Z}_2$ la trasformazione [5]

$$\underline{x}' = \bar{q}\underline{x}q \qquad \underline{x}, \underline{x}' \in \hat{\mathbf{Q}}.$$

Notiamo che in particolare risulta

$$\pi(\pm i_\nu) = \begin{pmatrix} \eta_{1\nu} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{1\nu}\eta_{2\nu} \end{pmatrix}$$

ove i coefficienti $\eta_{a\nu}$ valgono $+1$ o -1 e sono definiti dalle uguaglianze

$$i_\nu i_a i_\nu = \eta_{a\nu} i_a \qquad (a = 1, 2; \nu = 0, 1, 2, 3).$$

2. Il gruppo $\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$

Ricordiamo [6] che il *gruppo unitario quaternionale generalizzato* $\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$ è il quoziente del prodotto $\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{Sp}(1)$ modulo il sottogruppo $\Gamma_2 \equiv \{(\Delta, 1), (-\Delta, -1)\}$, ove Δ è la matrice unità di ordine n.

L'elemento di $\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$ ottenuto identificando gli elementi (A, q), $(-A, -q)$ di $\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{Sp}(1)$ verrà indicato con $\pm(A, q)$.

Per ogni fissato n si ha una immersione

$$\beta_n : \mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{SO}(4n)$$

associando all'elemento $\pm(A, q)$ la trasformazione di $\mathbf{R}^{4n}$, pensato identificato come d'uso [7] con $\mathbf{Q}^n$, definita dalle equazioni

$$'X^\beta = A^\beta_\alpha X^\alpha q \qquad (\underline{X} \equiv (X^\alpha), '\underline{X} \equiv ('X^\beta) \in \mathbf{Q}^n; \alpha, \beta = 1, \cdots, n).$$

Per $n = 1$ β_1 è un isomorfismo.

Si ha inoltre un omomorfismo

$$\lambda : \mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{SO}(3)$$

definito ponendo $\lambda(\pm(A, q)) = \pm q$ e facendo riferimento alla identificazione di $\mathrm{Sp}(1)/\mathbf{Z}_2$ con $\mathrm{SO}(3)$ fornita dall'isomorfismo π [8].

(5) Spesso anche nel seguito penseremo indifferentemente gli elementi dei gruppi considerati come trasformazioni ovvero come matrici, con riferimento a fissate basi canoniche.

(6) Cfr. ad esempio la bibliografia posta in fine.

(7) Ponendo

$$(X^\alpha = x^\alpha + x^{\alpha+n} i_1 + x^{\alpha+2n} i_2 + x^{\alpha+3n} i_3) \equiv (x^k) \quad (\alpha = 1, \cdots, n; k = 1, \cdots, 4n)$$

per

$$\underline{X} \equiv (X^\alpha) \in \mathbf{Q}^n \quad \text{e} \quad \underline{x} \equiv (x^k) \in \mathbf{R}^{4n}.$$

(8) Che peraltro sottointenderemo spesso nel seguito.

3. COOMOLOGIA DEL CLASSIFICANTE DI $\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$

In [5] si è visto che l'anello di coomologia a coefficienti in $\mathbf{Z}_2$ dello spazio classificante $B_{\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)}$ è isomorfo all'anello di polinomi $\mathbf{Z}_2[\varepsilon_2, \varepsilon_3, W_4, \cdots, W_{4n}]$ ove $W_4, \cdots, W_{4n}$ sono le classi di Stiefel–Whitney, di dimensione multipla di 4, del fibrato reale estensione mediante β_n del fibrato universale $\xi_{\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)}$ e $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ sono rispettivamente le immagini delle classi di Stiefel–Whitney di dimensione 2, 3 del fibrato universale $\xi_{\mathrm{SO}(3)}$ secondo l'omomorfismo

$$\lambda_B^* : H^*(B_{\mathrm{SO}(3)}, \mathbf{Z}_2) \to H^*(B_{\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)}, \mathbf{Z}_2)$$

indotto da λ.

4. SOTTOGRUPPI MASSIMALI DI $\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$ DEL TIPO $\mathbf{Z}_2\times\cdots\times\mathbf{Z}_2$

Sia $\overset{\circ}{Q}(n)$ il sottogruppo di $\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$ costituito dagli elementi del tipo

$$\pm\left(\begin{pmatrix} \varepsilon_1 i_\nu & & O \\ & \ddots & \\ O & & \varepsilon_n i_\nu \end{pmatrix}, i_\nu\right),$$

che denoteremo anche $\pm(((\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n))\, i_\nu, i_\nu)$, ove $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, \cdots, n)$ e $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Si tratta di un gruppo isomorfo a $(\mathbf{Z}_2)^{n+2}$, che non è contenuto in alcun toro massimale di $\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$, massimale tra i sottogruppi di $\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$ del tipo $\mathbf{Z}_2\times\cdots\times\mathbf{Z}_2$: inoltre ogni altro sottogruppo massimale di tale tipo è ad esso coniugato [6].

Fissiamo in $\overset{\circ}{Q}(n)$, pensato come $\mathbf{Z}_2$-modulo ($\mathbf{Z}_2 \equiv \{0, 1\}$), la base

$$\tilde{x}_i = \pm(((1, \cdots, \varepsilon_i = -1, \cdots, 1)), 1), \qquad i = 1, \cdots, n;$$

$$\tilde{z}_\alpha = \pm(((1, \cdots, 1))\, i_\alpha, i_\alpha), \qquad \alpha = 1, 2$$

e sia $x_1, \cdots, x_n, z_1, z_2$ la base duale nel $\mathbf{Z}_2$-modulo $\mathrm{Hom}(\overset{\circ}{Q}(n), \mathbf{Z}_2)$.

Come è noto (9) $\mathrm{Hom}(\overset{\circ}{Q}(n), \mathbf{Z}_2)$ può identificarsi canonicamente con $H^1(B_{\overset{\circ}{Q}(n)}, \mathbf{Z}_2)$, di modo che $x_1, \cdots, x_n, z_1, z_2$ potranno presentarsi come classi di coomologia di dimensione 1, risultando inoltre $H^*(B_{\overset{\circ}{Q}(n)}, \mathbf{Z}_2)$ coincidente con l'anello di polinomi $\mathbf{Z}_2[x_1, \cdots, x_n, z_1, z_2]$ (9).

(9) Cfr. ad esempio [2], p. 496.

5. Sia ora

$$(\zeta_n)^*_\beta : H^*(B_{Sp(n)\cdot Sp(1)}, \mathbf{Z}_2) \to H^*(B_{\tilde{Q}(n)}, \mathbf{Z}_2)$$

l'omomorfismo indotto dall'immersione $\zeta_n : \tilde{Q}(n) \to Sp(n)\cdot Sp(1)$.

Mostriamo che

PROPOSIZIONE. *Valgono le*

$$(5.1) \qquad (\zeta_n)^*_B (W_i) = \sigma_i (x_1, x_1 + z_1, x_1 + z_2, x_1 + z_1 + z_2, \cdots, \cdots, x_n, x_n + z_1, x_n + z_2, x_n + z_1 + z_2) \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

$$(5.2) \qquad (\zeta_n)^*_B (\varepsilon_k) = \sigma_k (z_1, z_2, z_1 + z_2) \qquad k = 2, 3$$

avendo indicato con $\sigma_i(y_1, \cdots, y_r)$ *l'i-esimo polinomio simmetrico elementare nelle variabili* $y_1, \cdots, y_r$.

Dimostrazione. Indichiamo con $Q(n)$ il sottogruppo delle matrici diagonali di $O(n)$, del tipo

$$((\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)) \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & O \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ O & & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_i = \pm 1, \; i = 1, \cdots, n.$$

Si noti che restringendo a $\tilde{Q}(n)$ la composizione β'_n di β_n con l'immersione di $SO(4n)$ in $O(4n)$ si ha un omomorfismo

$$\bar{\beta}_n : \tilde{Q}(n) \to Q(4n)$$

per il quale

$$(5.3) \qquad \bar{\beta}_n [\pm (((\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)) i_\nu, i_\nu)] = = ((\varepsilon_1, \varepsilon_1 \eta_{1\nu}, \varepsilon_1 \eta_{2\nu}, \varepsilon_1 \eta_{1\nu} \eta_{2\nu}, \cdots, \varepsilon_n, \varepsilon_n \eta_{1\nu}, \varepsilon_n \eta_{2\nu}, \varepsilon_n \eta_{1\nu} \eta_{2\nu})).$$

Analogamente, la restrizione a $\tilde{Q}(n)$ dell'omomorfismo λ' ottenuto componendo λ con l'immersione di $SO(3)$ in $O(3)$ dà luogo all'omomorfismo

$$\bar{\lambda} : \tilde{Q}(n) \to Q(3)$$

per il quale

$$(5.4) \qquad \bar{\lambda} [\pm ((\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)) i_\nu, i_\nu] = ((\eta_{1\nu}, \eta_{2\nu}, \eta_{1\nu} \eta_{2\nu})).$$

Per entrambi gli omomorfismi β'_n e λ' ci si trova dunque nelle condizioni in cui può applicarsi la Prop. 11.3 di [2].

I 2-pesi di β'_n sono, come si ricava immediatamente dalle (5.3),

$$\omega_i^0 = x_i \;, \; \omega_i^1 = x_i + z_1 \;, \; \omega_i^2 = x_i + z_2 \;, \; \omega_i^3 = x_i + z_1 + z_2 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

e, per la proposizione citata, si ha la uguaglianza

$$(5.5) \qquad (\zeta_n)_B^* (1 + W_1 + W_2 + \cdots + W_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} [(1 + x_i)(1 + x_i + z_1)(1 + x_i + z_2)(1 + x_i + z_1 + z_2)] ,$$

equivalente alle (5.1) in base all'identità polinomiale

$$(5.6) \qquad \prod_{i=1}^{r} (y_i + t) = \sum_{k=0}^{r} \sigma_k (y_1, \cdots, y_r)\, t^{r-k}.$$

I 2-pesi di λ' sono, guardando le (5.4),

$$\omega_1 = z_1 \quad , \quad \omega_2 = z_2 \quad , \quad \omega_3 = z_1 + z_2 .$$

Inoltre, come si è richiamato al n. 3, le classi di Stiefel-Whitney di dimensione 2 e 3 della estensione del fibrato universale $E_{Sp(n)\cdot Sp(1)} \rightarrow \rightarrow B_{Sp(n)\cdot Sp(1)}$ mediante λ' sono precisamente ε_2 e ε_3.

Tenuto conto di quest'ultima osservazione la proposizione citata fornisce l'uguaglianza

$$(5.7) \qquad (\zeta_n)_B^* (1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = (1 + z_1)(1 + z_2)(1 + z_1 + z_2) ,$$

equivalente alle (5.2) in base alla identità polinomiale (5.6).

6. Stabiliamo ora la seguente

PROPOSIZIONE. *L'omomorfismo* $(\zeta_n)_B^*$ *è iniettivo.*

Dimostrazione. Per $n = 1$ $\beta_1 : Sp(1)\cdot Sp(1) \rightarrow SO(4)$ è un isomorfismo, e l'iniettività di $(\zeta_1)_B^*$ è già nota nel caso del gruppo SO (4) (10).

Procederemo allora per induzione rispetto ad n.

Ricordiamo (11) a tale scopo che si ha un omomorfismo iniettivo

$$\mu_n : Sp(n)\cdot Sp(1) \rightarrow Sp(n+1)\cdot Sp(1)$$

per il quale

$$\mu_n (\pm (A , q)) = \pm \left[\begin{pmatrix} A & O \\ O & \bar{q} \end{pmatrix} , q \right]$$

e che l'omomorfismo

$$(\mu_n)_B^* : H^* (B_{Sp(n+1)\cdot Sp(1)} , \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^* (B_{Sp(n)\cdot Sp(1)} , \mathbf{Z}_2)$$

ha per nucleo l'ideale generato da $W_{4(n+1)}$.

Osserviamo inoltre che $\mu_n (\tilde{Q}(n)) \subset \tilde{Q}(n+1)$.

(10) Cfr. [1], p. 184.
(11) Cfr. [5].

Consideriamo ora il diagramma *commutativo*

$$\begin{array}{ccc} H^*(B_{Sp(n+1)\cdot Sp(1)}, \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{(\mu_n)^*_B} & H^*(B_{Sp(n)\cdot Sp(1)}, \mathbf{Z}_2) \\ \downarrow{\scriptstyle (\zeta_{n+1})^*_B} & & \downarrow{\scriptstyle (\zeta_n)^*_B} \\ H^*(B_{\tilde{Q}(n+1)}, \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{(\bar{\mu}_n)^*_B} & H^*(B_{\tilde{Q}(n)}, \mathbf{Z}_2) \end{array}$$

ove $\bar{\mu}_n$ è la restrizione di μ_n a $\tilde{Q}(n)$.

Supponiamo $(\zeta_n)^*_B$ iniettivo e mostriamo che lo è anche $(\zeta_{n+1})^*_B$.

Infatti, se $R(W_4, \cdots, W_{4(n+1)}, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ è un polinomio non nullo in $H^*(B_{Sp(n)\cdot Sp(1)}, \mathbf{Z}_2)$ per il quale risulta

$$(6.1) \qquad (\zeta_{n+1})^*_B (R(W_4, \cdots, W_{4(n+1)}, \varepsilon_2, \varepsilon_3)) = 0$$

dovrà anche essere $(\mu_n)^*_B (R(W_4, \cdots, W_{4(n+1)}, \varepsilon_2, \varepsilon_3)) = 0$, il che comporta

$$(6.2) \qquad R(W_4, \cdots, W_{4(n+1)}, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = W_{4(n+1)} [R'(W_4, \cdots, W_{4(n+1)}, \varepsilon_2, \varepsilon_3)].$$

Ma dalle (5.1) risulta che

$$(\zeta_{n+1})^*_B (W_{4(n+1)}) = \sigma_{4n}(x_1, x_1 + z_1, x_1 + z_2, x_1 + z_1 + z_2, \cdots)$$

e dunque $(\zeta_{n+1})^*_B (W_{4(n+1)}) \neq 0$. Pertanto il sussistere delle (6.1), (6.2) implica che sia

$$(\zeta_{n+1})^*_B (R'(W_4, \cdots, W_{4(n+1)}, \varepsilon_2, \varepsilon_3)) = 0 .$$

Iterando il ragionamento si ricava

$$R(W_4, \cdots, W_{4(n+1)}, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \equiv \alpha (W_{4(n+1)})^k \qquad \alpha = \text{cost.}$$

e necessariamente $\alpha = 0$ poiché $(\zeta_{n+1})^*_B (W_{4(n+1)}) \neq 0$.

7. Alcune relazioni notevoli tra le classi di coomologia di $B_{Sp(n)\cdot Sp(1)}$

Sappiamo già che le classi $W_i \in H^*(B_{Sp(n)\cdot Sp(1)}, \mathbf{Z}_2)$ con $i \not\equiv 0 \pmod 4$ possono esprimersi come polinomi nelle classi $\varepsilon_2, \varepsilon_3, W_{4k}$ $(4k < i)$ con coefficienti in $\mathbf{Z}_2$.

Le proposizioni dimostrate ai nn. 5, 6 permettono di determinare l'espressione esplicita delle W_i.

In effetti si ha che

PROPOSIZIONE. *Se* $j \not\equiv 0 \pmod 4$

$$(7.1) \qquad W_j = \sum_{4m+2p+3q=j} B^m_{pq} W_{4m} \varepsilon_2^p \varepsilon_3^q$$

ove la sommatoria a secondo membro si intende estesa a tutte le terne (p, q, m) *di numeri interi verificanti la relazione* $4m + 2p + 3q = j$ *e i coefficienti* $B_{pq}^{m} \in \mathbf{Z}_2$ *risultano precisati scrivendo le medesime relazioni nella forma*

$$
(7.2) \qquad W_j = \sum_{4l_0+2h_0+3k_0=j} \ \sum_{4l_1+2h_1+3k_1=4l_0}^{l_1<l_0} \cdots \sum_{4l_s+2h_s+3k_s=4l_{s-1}}^{l_s<l_{s-1}} \overset{(l_0)}{A}_{h_0k_0} \overset{(l_1)}{A}_{h_1k_1} \cdots
$$

$$
\cdots \overset{(l_s)}{A}_{h_sk_s} W_{l_s} \varepsilon_2^{h_0+\cdots+h_s} \varepsilon_3^{k_0+\cdots+k_s}
$$

e avendo posto

$$
\overset{(l)}{A}_{hk} = \binom{n-l}{h+k} \binom{h+k}{k} .
$$

Dimostrazione. Utilizzando successivamente l'identità polinomiale (5.6) si hanno le uguaglianze

$$
\sum_{k=0}^{n} \sigma_k (x_1, x_1+z_1, x_1+z_2, x_1+z_1+z_2, \cdots, x_n, x_n+z_1, x_n+z_2, x_n+z_1+z_2)\, t^{4n-k} =
$$

$$
= \prod_{i=1}^{n} [(x_i+t)(x_i+z_1+t)(x_i+z_2+t)(x_i+z_1+z_2+t)] =
$$

$$
= \prod_{i=1}^{n} [(x_i+t)^4 + \sigma_2(z_1, z_2, z_1+z_2)(x_i+t)^2 + \sigma_3(z_1, z_2, z_1+z_2)(x_i+t)]
$$

donde, tenuto conto delle (5.1), (5.2) e calcolando modulo 2, risulta

$$
\sum_{k=0}^{4n} (\zeta_n)_B^* (W_k)\, t^{4n-k} =
$$

$$
= \prod_{i=1}^{n} [(\zeta_n)_B^*(\varepsilon_3)\, t + (\zeta_n)_B^*(\varepsilon_2)\, t^2 + t^4 + (\zeta_n)_B^*(\varepsilon_3)\, x_i + (\zeta_n)_B^*(\varepsilon_2)\, x_i^2 + x_i^4] .
$$

Posto

$$
'W_k = (\zeta_n)_B^*(W_k) \ (k = 1, \cdots, 4n) , \ '\varepsilon_2 = (\zeta_n)_B^*(\varepsilon_2) , \ '\varepsilon_3 = (\zeta_n)_B^*(\varepsilon_3) ,
$$

$$
\psi_i = \sigma_i ('\varepsilon_3 x_1 + '\varepsilon_2 x_1^2 + x_1^4, \cdots, '\varepsilon_3 x_n + '\varepsilon_2 x_n^2 + x_n^4)
$$

e uguagliati i coefficienti di t^j $(j = 1, \cdots, 4n)$ a primo e secondo membro della precedente uguaglianza, si trovano le

$$
(7.3) \qquad 'W_j = \sum_{4i+2h+3k=j} \overset{(i)}{A}_{hk}\, '\psi_i\, '\varepsilon_2^h\, '\varepsilon_3^k
$$

$(j = 1, \cdots, 4n;\ i, h, k$ interi).

Notiamo ora che le classi $'\psi_i \in H^{4i}(B_{\tilde{Q}(n)}, \mathbf{Z}_2)$ possono esprimersi come polinomi (a coefficienti in $\mathbf{Z}_2$), mediante le classi $'\varepsilon_2, '\varepsilon_3, 'W_{4k}$ $(k = 1, \cdots, n)$.

Infatti posto $j = 4l$ nella (7.3) e osservato che $\overset{(l)}{A}_{00} = 1$, si ha

$$(7.4) \qquad {}'\psi_l = {}'W_{4l} + \sum_{4l_1+2h_1+3k_1=4l}^{l_1<l} \overset{(l_1)}{A}_{h_1k_1} {}'\psi_{l_1} {}'\varepsilon_2^{h_1} {}'\varepsilon_3^{k_1}$$

e, in particolare, per $l = 1$

$$'\Psi_1 = {}'W_4 + \binom{n}{2} {}'\varepsilon_2^2 .$$

Sostituendo l'espressione trovata per $'\psi_1$ nella (7.4) per $l = 2$ si trova l'espressione di $'\psi_2$ mediante $'W_4, 'W_8, '\varepsilon_2, '\varepsilon_3$ la quale, sostituita a sua volta nella (7.4) per $l = 3$ fornisce l'espressione di $'\psi_2$, etc.

In definitiva risulta

$$(7.5) \qquad {}'\psi_i = {}'W_{4i} + \sum_{4l_1+2h_1+3k_1=4i}^{0\le l_1<i} \sum_{4l_2+2h_2+3k_2=4l_1}^{0\le l_2<l_1} \cdots$$

$$\cdots \sum_{4l_s+2h_s+3k_s=4l_{s-1}}^{0\le l_s<l_{s-1}} \overset{(l_1)}{A}_{h_1k_1} \overset{(l_2)}{A}_{h_2k_2} \cdots \overset{(l_s)}{A}_{h_sk_s} \varepsilon_2^{h_1+\cdots+h_s} \cdot \varepsilon_3^{k_1+\cdots+k_s} .$$

Sostituendo tale espressione nel secondo membro della (7.3) e tenuto conto poi che $(\zeta_n)_B^*$ è un monomorfismo si hanno infine le cercate (7.2).

A titolo di esempio riportiamo il calcolo esplicito delle prime classi W_i quale segue dalle (7.2).

Per $i = 2, 3$ si hanno le

$$(7.6) \qquad \varepsilon_2 = nW_2 \quad , \quad \varepsilon_3 = nW_3$$

peraltro già stabilite in [5].

Per le successive classi non multiple di 4 si ha poi

$$W_5 = 0 \quad , \quad W_6 = (n-1)\, W_4\, \varepsilon_2 + \left[\binom{n}{3} + (n-1)\binom{n}{2}\right] \varepsilon_2^3 + \binom{n}{2} \varepsilon_3^2 ,$$

$$W_7 = (n-1)\, W_4\, \varepsilon_3 + \left[3\binom{n}{3} + (n-1)\binom{n}{2}\right] \varepsilon_2^2\, \varepsilon_3^2 \ , \ W_9 \equiv \binom{n}{3} \varepsilon_3^3 \pmod 2$$

$$W_{10} = \left[\binom{n-1}{2}\binom{n}{2}\right] \varepsilon_2^2\, \varepsilon_3^2 + \left[\binom{n}{5} + \binom{n-1}{3}\binom{n}{2} + \right.$$

$$\left. + (n-2)\binom{n-1}{2}\binom{n}{2}\right] \varepsilon_2^5 + \left[\binom{n-1}{3} + \right.$$

$$\left. + (n-2)\binom{n-1}{2}\right] W_4\, \varepsilon_2^3 + (n-2)\, W_8\, \varepsilon_2 + \binom{n-1}{2} W_4\, \varepsilon_3^2, \cdots$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BOREL (1953) – *Sur la cohomologie* mod 2 *de certains espaces homogènes*, « Comment. Math. Hev. », *27*.

[2] A. BOREL e F. HIRZEBRUCH (1958) – *Characteristic classes and homogeneous spaces*, « Amer. Journal of Math. », *80*.

[3] C. CHEVALLEY (1946) – *Theory of Lie Groups*. Princeton University Press. Princeton.

[4] S. MARCHIAFAVA e G. ROMANI – *Sui fibrati con struttura quaternionali generalizzata*, « Annali di Matematica ». Vol. CVII, 1976.

[5] S. MARCHIAFAVA e G. ROMANI – *Sul classificante del gruppo* Sp (n) · Sp (1), « Annali di Matematica ». Vol. CX, 1976.

[6] S. MARCHIAFAVA e G. ROMANI – *Alcune osservazioni sui sottogruppi abeliani del gruppo* Sp (n)·Sp (1). in corso di stampa su « Annali di Matematica ».