Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Beniamino Segre

Invarianti proiettivi integrali inerenti a certe coppie o terne di curve chiuse

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.5, p. 420–427.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_5_420_0>

Geometria differenziale. — *Invarianti proiettivi integrali inerenti a certe coppie o terne di curve chiuse.* Nota [(*)] del Socio BENIAMINO SEGRE.

SUMMARY. — It is shown that, if C is a closed curve of a projective $S_r (r \geq 2)$ and Γ denotes any other closed curve lying on the developable surface Σ circumscribed to C, it is possible to attach to C and Γ a *projective* integral *invariant*, $\{C ; \Gamma\}$, having a simple metrical definition (given in n. 3, Cor. I). Moreover, it is proved (Theor. VII and Cor. II) that this invariant $\{C ; \Gamma\}$ vanishes whenever Γ is semialgebraic (i.e., obtainable as the intersection of Σ with an algebraic primal of S_r) and that, if $r \geq 3$, $\{C ; \Gamma\}$ remains unchanged when C and Γ are substituted by their projections from an arbitrary S_h on an S_{r-h-1} of S_r skew to S_h $(0 \leq h \leq r-3)$. Further similar results are previously obtained, by using certain preliminary simple properties (cf. Theorems I and II), in connection with C, Γ and a third closed curve Δ lying on Σ.

Il presente lavoro è da me dedicato all'amico Bruno de Finetti, in occasione del suo settantesimo compleanno.

Va rilevato che i risultati qui ottenuti (di cui al precedente *Summary*), pur essendo del tutto nuovi, possono in certo senso venir considerati come casi limiti di proprietà dei rapporti plurisezionali relativi ai poligoni chiusi puntati, risalenti per $r \leq 3$ a Moebius e Poncelet ed estese per $r > 3$ da C. Longo [2]; su queste ultime era di recente ritornato con peculiare eleganza il compianto E. Bompiani in uno dei suoi ultimi lavori [1].

L'analogia col caso dei poligoni si sarebbe potuta sfruttare attraverso ad un diretto procedimento di limite, introducendo $\{C ; \Gamma\}$ come logaritmo del rapporto plurisezionale del «poligono chiuso con infiniti vertici» dati dai punti di C, avente dunque le tangenti di C come lati, «poligono» da considerarsi «puntato» coi punti di Γ. Tuttavia un siffatto procedimento – volendolo svolgere in modo rigoroso – risulterebbe piuttosto lungo e delicato; ond'è preferibile quello autonomo qui appresso seguito, che fa intervenire la forma pfaffiana invariante $[C_t ; O, M, N] \, dt$ (definita nel n. 1), inerente ad una curva C (parametrizzata col parametro t), ad un punto O di C ed a due punti M, N della tangente a C in O. Perveniamo in tal guisa (n. 2) all'invariante proiettivo $\{C ; \Gamma, \Delta\}$ relativo alla curva chiusa C ed a due curve Γ, Δ qualsiansi unisecanti rispettivamente in M, N le tangenti di C, definito quale integrale esteso a C della suddetta forma pfaffiana; da esso deduciamo $\{C ; \Gamma\}$ come il valore (indipendente da Δ) assunto da $\{C ; \Gamma, \Delta\}$ nell'ipotesi che Δ sia semialgebrica d'indice 1 (Teor. VI) [(1)].

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1976.

(1) Il metodo così adombrato e più oltre chiarito, potrebbe – con opportune varianti – dar anche luogo ad applicazioni di altro tipo, per esempio nello studio delle due falde focali di una congruenza di rette di uno spazio proiettivo, e quindi nella teoria geometrica delle equazioni di Laplace; ma su ciò, per brevità, qui sorvoliamo.

1. INVARIANTE PROIETTIVO DI UNA CURVA PARAMETRIZZATA E DI DUE PUNTI GIACENTI SU DI UNA SUA TANGENTE

In un S_r proiettivo (reale o complesso), di dimensione $r \geq 2$, siano O un punto semplice di una curva C (di classe $\mathscr{C}^1$) ed M, N due punti distinti da O della retta l tangente in O alla C. Vogliamo mostrare come l'intorno del prim'ordine di O su C ed i punti M, N definiscano un invariante proiettivo, in certa guisa assimilabile ad un birapporto e che verrà perciò denotato col simbolo $[C_t, O, M, N]$.

A tal uopo, introduciamo nell'intorno di O su C un qualunque parametro uniformizzante, t, che per esempio assuma in O il valore $t = 0$; e sia t il valore (abbastanza piccolo) del parametro in un punto P di tale intorno distinto da O. Scelto poi in S_r un qualunque S_{r-2} sghembo con l e non passante per P, l'iperpiano PS_{r-2} non conterrà l epperciò segherà l in un determinato punto, P^*. Proveremo il

TEOREMA I. *Esiste il* $\lim\limits_{t\to 0} [(OMP^*N)/t]$, *e non dipende dalla scelta di* S_{r-2}, *ma soltanto da quella del parametro uniformizzante* t (2).

Introduciamo in S_r (com'è lecito) coordinate proiettive non omogenee $x_1, x_2, \cdots, x_r$, in guisa che O ed l rispettivamente vengano a coincidere con l'origine e con l'asse delle x_1; e siano $(m, 0, \cdots, 0)$ ed $(n, 0, \cdots, 0)$ (con $m \neq 0, n \neq 0$) le coordinate di M, N. In un intorno di O, la curva C avrà equazioni parametriche della forma

$$x_1 = \alpha t + \cdots, \qquad x_2 = \cdots, \qquad \cdots, \qquad x_r = \cdots, \tag{1}$$

dove $\alpha \neq 0$ ed i puntini nelle formule denotano termini infinitesimi in t d'ordine > 1. Rappresentato poi S_{r-2} con le equazioni

$$\sum_{i=1}^{r} a_i x_i + b = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{r} a_i' x_i + b' = 0 , \tag{2}$$

la condizione che tale S_{r-2} sia sghembo con l si tradurrà con la

$$a_1 b' - a_1' b \neq 0 , \tag{3}$$

la quale implica anche ovviamente l'indipendenza lineare delle due equazioni (2).

Il suddetto punto $P^*(x_1^*, 0, \cdots, 0)$ di l sarà quindi definito dall'equazione di primo grado in x_1^*:

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{r} a_i x_i + b & \sum_{i=1}^{r} a_i' x_i + b' \\ a_1 x_1^* + b & a_1' x_1^* + b' \end{vmatrix} = 0,$$

(2) L'espressione in parentesi tonde sotto il segno di limite denota, secondo il consueto, un ordinario birapporto.

dove le x si esprimono con le (1), onde il coefficiente di x_1^* per $t \to 0$ tende al primo membro della (3) cambiato di segno. Avuto riguardo alla (3), ne discendono tosto le

$$\lim_{t\to 0} x_1^* = 0 \quad , \quad \lim_{t\to 0} [x_1^*/t] = \alpha \, ,$$

eppertanto

$$\lim_{t\to 0} [(\mathrm{OMP^*N})/t] = \lim_{t\to 0} [(omx_1^* n)/t] = \alpha \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) .$$

Abbiamo così dimostrato l'esistenza del limite considerato nel Teor. I. Esso non dipende dai coefficienti che figurano nelle (2), ossia dalla scelta di S_{r-2}, onde l'asserto.

Se nell'intorno di O su C si fissa poi ad arbitrio un nuovo parametro uniformizzante τ, esso pure nullo in O, dovrà aversi

$$\tau = kt + \cdots \qquad \text{con} \quad k \neq 0 \, .$$

Pertanto le (1) si mutano nelle

$$x_1 = \frac{\alpha}{k} \tau + \cdots , \qquad x_2 = \cdots , \qquad \cdots , \qquad x_r = \cdots ,$$

onde nel nuovo parametro il limite suddetto va sostituito da

$$\lim_{\tau \to 0} [\mathrm{OMP^*N})/\tau] = \frac{\alpha}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) .$$

Posto dunque per abbreviare

$$[\mathrm{C}_t \, ; \mathrm{O} \, , \mathrm{M} \, , \mathrm{N}] = - \lim_{t\to 0} [(\mathrm{OMP^*N})/t] \, ,$$

e similmente per il parametro τ, ne consegue l'uguaglianza

$$[\mathrm{C}_t \, ; \mathrm{O} \, , \mathrm{M} \, , \mathrm{N}] \, \mathrm{d}t = [\mathrm{C}_\tau \, ; \mathrm{O} \, , \mathrm{M} \, , \mathrm{N}] \, \mathrm{d}\tau \, .$$

Avuto riguardo al Teor. I, abbiamo così provato il

TEOREMA II. *La forma pfaffiana* $[\mathrm{C}_t \, ; \mathrm{O} \, , \mathrm{M}, \mathrm{N}] \, \mathrm{d}t$ *è un invariante proiettivo assoluto, attaccato alla curva* C *ed alla coppia di punti* M , N *giacenti sulla retta* l *tangente a* C *nel punto* O.

Con le precedenti notazioni, risulta precisamente

$$[\mathrm{C}_t \, ; \mathrm{O} \, , \mathrm{M} \, , \mathrm{N}] \, \mathrm{d}t = \alpha \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \mathrm{d}t \, .$$

In particolare, se si introduce in S_r una metrica euclidea, si può assumere su C come parametro l'arco s, onde nelle (1) attualmente va posto $\alpha = 1$; si ottiene così allora semplicemente

$$[\mathrm{C}_s \, ; \mathrm{O} \, , \mathrm{M} \, , \mathrm{N}] \, \mathrm{d}s = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \mathrm{d}s \, , \tag{4}$$

dove m , n denotano precisamete le lunghezze dei segmenti OM , ON.

2. INVARIANTI PROIETTIVI INTEGRALI RELATIVI A CERTE TERNE DI CURVE CHIUSE

Detta ora C una qualunque curva chiusa di classe $\mathscr{C}^1$ giacente in un S_r proiettivo ($r \geq 2$), siano M, N due punti della tangente l a C nel punto O, i quali, al variare di O su C, descrivano due curve Γ, Δ chiuse, di classe $\mathscr{C}^0$ (tracciate sulla sviluppabile Σ circoscritta a C). A norma del Teor. II, l'*integrale*

$$\oint_C [C_t ; O, M, N] \, dt,$$

se esiste, dipende soltanto dalle tre curve C, Γ, Δ (e non dal verso di percorrenza di C né dalla scelta del parametro t sulla C), delle quali costituisce un *invariante proiettivo assoluto*; esso potrà quindi venir designato brevemente col simbolo $\{C ; \Gamma, \Delta\}$.

In base alla (4) che compare nell'ultimo capoverso del n. 1, fatto di S_r uno spazio euclideo, si può ad esempio assumere

$$\{C ; \Gamma, \Delta\} = \oint_C \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) ds, \tag{5}$$

dove s designa l'arco lungo C ed m, n denotano le lunghezze dei segmenti OM, ON.

Dalla (5) segue subito il

TEOREMA III. *Se* C *è una curva chiusa di* S_r *e* Γ, Δ, H *denotano tre curve chiuse unisecanti le tangenti di* C, *sussiste l'uguaglianza*

$$\{C ; \Gamma, \Delta\} + \{C ; \Delta, H\} = \{C ; \Gamma, H\}.$$

Supposto $r \geq 3$, fissiamo in S_r un generico punto P ed un iperpiano S'_{r-1} non passante per P. È chiaro che C, Γ, Δ si proiettano da P su S'_{r-1} secondo tre curve chiuse, C', Γ', Δ', tali che la sviluppabile circoscritta alla prima di queste contiene le altre due. Ci proponiamo di dimostrare il

TEOREMA IV. *Vale la proprietà d'invarianza per proiezioni, espressa dalla*

$$\{C ; \Gamma, \Delta\} = \{C' ; \Gamma', \Delta'\}. \tag{6}$$

In forza del carattere proiettivo del suddetto invariante integrale, è lecito fare di S_r uno spazio euclideo che abbia in P un punto all'infinito, onde S'_{r-1} risulterà un iperpiano (euclideo) proprio di S_r. Inoltre, la proiezione da P su S'_{r-1} istituirà una corrispondenza a f f i n e fra ogni tangente di C e la corrispondente tangente di C′, in virtù della quale – con notazioni evidenti – risulterà

$$\frac{ds}{m} = \frac{ds'}{m'} \quad , \quad \frac{ds}{n} = \frac{ds'}{n'} .$$

Basta dunque applicare la (5) per ottenere la (6).

Preso un qualunque intero h soddisfacente alle

$$0 \leq h \leq r - 3 ,$$

fissiamo genericamente un S_h ed un S_{r-h-1} di S_r. Poiché la proiezione da S_h su S_{r-h-1} può ottenersi componendo le proiezioni da $h+1$ punti generici di S_h su altrettanti iperpiani generici passanti per S_{r-h-1}, applicando successivamente per queste $h+1$ volte il Teor. IV otteniamo senz'altro il

TEOREMA V. *La (6) continua più generalmente a sussistere quando* C', Γ', Δ' *designino le* *p r o i e z i o n i* *di* C, Γ, Δ *da* S_h *su* S_{r-h-1}. *Ne discende che l'invariante proiettivo integrale* $\{C ; \Gamma , \Delta\}$ *n o n m u t a , quando alle curve* C, Γ, Δ *si sostituiscano altre curve* C^*, Γ^*, Δ^*, *ancora chiuse, che si ottengano dalle prime facendo scorrere i punti* O, M, N *rispettivamente lungo* OS_h, MS_h, NS_h *in punti* O^*, M^*, N^* *rispettivamente descriventi* C^*, Γ^*, Δ^*, *sotto la sola condizione che questi punti risultino ancora allineati e tali che* M^*, N^* *stiano sulla tangente in* O^* *a* C^*.

3. L'INVARIANTE $\{C ; \Gamma , \Delta\}$ NEL CASO IN CUI QUALCUNA DELLE CURVE Γ, Δ SIA SEMIALGEBRICA, E L'INVARIANTE $\{C ; \Gamma\}$

Siano ancora C, Γ curve chiuse di S_r ($r \geq 2$), rispettivamente di classi $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^0$, la seconda delle quali unisechi in M la tangente l alla prima nel generico punto O. Fissiamo in S_r una qualunque i p e r s u p e r f i c i e a l g e b r i c a φ, d'ordine $k \geq 1$, che non contenga nessuna delle l. La φ e la generica l si incontreranno (nel campo complesso) in k punti distinti o coincidenti:

$$N_1 , N_2 , \cdots , N_k ,$$

il cui luogo sarà la curva, Δ, i n t e r s e z i o n e di φ colla sviluppabile Σ circoscritta a C. Una curva Δ siffatta verrà detta *semialgebrica d'indice* k (relativamente a C); ad esempio, per $k = 1$, Δ altro non è che una sezione iperpiana di Σ.

A norma dei nn. 1, 2, per le tre curve C, Γ, Δ suddette potrà venir definito $\{C ; \Gamma , \Delta\}$ col porre

$$\{C ; \Gamma , \Delta\} = \oint_C \sum_{j=1}^{k} [C_t ; O , M , N_j] \, dt ;$$

e questo risulterà un loro *invariante proiettivo*. Per calcolarlo, potremo introdurre in S_r una m e t r i c a e u c l i d e a e rammentare il capoverso finale del n. 1; otterremo così, in analogia con la (5), l'uguaglianza

$$\{C\,;\,\Gamma\,,\Delta\} = k \oint_C \frac{ds}{m} - \oint_C \sum_{j=1}^{k} \frac{ds}{n_j}, \tag{7}$$

dove s designa l'arco lungo C ed m, n_j denotano le lunghezze dei segmenti OM , ON_j.

Ci proponiamo di dimostrare il

TEOREMA VI. *Quando* Δ *è semialgebrica, l'invariante* $\{C\,;\,\Gamma,\Delta\}$ *risulta dipendente soltanto da* C , Γ *e dall'indice* k *di* Δ. *Esso è così allora un invariante proiettivo delle sole curve* C , Γ, *e potrà quindi – per* $k = 1$, *ossia nell'ipotesi che* Δ *sia una sezione iperpiana della sviluppabile* Σ *– venir indicato col simbolo* $\{C\,;\,\Gamma\}$.

Ciò seguirà facendo vedere che nel secondo membro della (7) il sottraendo è sempre nullo, onde si otterrà anche il

COROLLARIO I. *In* S_r ($r \geq 2$), *una curva chiusa* C (*di classe* $\mathscr{C}^1$) *ed una curva chiusa* (*di classe* $\mathscr{C}^0$) *che unisechi le tangenti di* C *ammettono l'invariante proiettivo*

$$\{C\,;\,\Gamma\} = \oint_C \frac{ds}{m},$$

dove s *designa l'arco lungo* C *ed* m *denota la lunghezza del segmento intercetto da* Γ *sulle singole tangenti di* C *a partire dal relativo punto di contatto.*

In base alla definizione data nell'enunciato del Teor. VI, si avrà inoltre:

$$\{C\,;\,\Gamma\} = \{C\,;\,\Gamma\,,\Delta\}/k \qquad \text{con } \Delta \text{ semialgebrica d'indice } k\,;$$

e poiché (con notazioni analoghe a quelle del n. 2) dalla semialgebricità di Δ segue subito la semialgebricità di Δ', il Teor. V verrà poi così senz'altro ad implicare il

COROLLARIO II. *Se* $r \geq 3$, *vale la proprietà di invarianza per proiezioni espressa dalla*

$$\{C\,;\,\Gamma\} = \{C'\,;\,\Gamma'\},$$

dove C', Γ' *denotano le proiezioni di* C , Γ *da un qualunque* S_h *di* S_r *su di un* S_{r-h-1} *sghembo rispetto a questo* ($0 \leq h \leq r-3$).

Dimostrazioni. Supposto, com'è lecito, che S_r sia euclideo ed introdotte in esso coordinate cartesiane ortogonali

$$(x) = (x_1\,, x_2\,, \cdots, x_r)\,,$$

siano

$$x_1 = x_1(s) \quad , \quad x_2 = x_2(s) \quad , \cdots, \quad x_r = x_r(s)$$

le equazioni di C col parametro s dato dall' a r c o, e

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_r) = 0$$

l'equazione dell'ipersuperficie φ, dove il primo membro denoti un polinomio di grado k nelle x (a coefficienti costanti non tutte nulle). Per abbreviare, porremo

$$\Phi(s) = \varphi(x_1(s), \quad x_2(s), \quad \cdots, \quad x_r(s)).$$

Al variare di un nuovo parametro n, il punto N di coordinate

$$x_1(s) + nx_1'(s), \quad x_2(s) + nx_2'(s), \quad \cdots, \quad x_r(s) + nx_r'(s)$$

(dove gli apici denotano derivazioni rispetto ad s) descrive la retta l tangente a C nel punto O $(x(s))$, n essendo precisamente la lunghezza del segmento ON. Pertanto, i k punti N segati su l dall'ipersuperficie φ sono quelli che corrispondono alle k radici n_j $(j = 1, 2, \cdots, k)$ dell'equazione algebrica di grado k nella n:

$$\varphi(x_1(s) + nx_1'(s), \quad x_2(s) + nx_2'(s), \quad \cdots, \quad x_r(s) + nx_r'(s)) = 0.$$

È subito visto che, ordinando secondo le potenze crescenti di n, questa si scrive nella forma:

$$\Phi(s) + n\Phi'(s) + \cdots = 0,$$

onde risulta

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} = \frac{n_2 n_3 \cdots n_k + n_1 n_3 \cdots n_k + \cdots + n_1 n_2 \cdots n_{k-1}}{n_1 n_2 \cdots n_k} = -\frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)}.$$

Si ha pertanto

$$-\oint_C \sum_{j=1}^{k} \frac{ds}{n_j} = \oint_C d \log \Phi = 0, \tag{8}$$

il che – avuto riguardo alla (7) – prova simultaneamente il Teor VI ed i Corollari I, II.

Dal Cor. I e dalla (5), si ricava subito il

COROLLARIO III. *Nelle ipotesi specificate al principio del n. 2, sussiste l'uguaglianza*:

$$\{C; \Gamma, \Delta\} = \{C; \Gamma\} - \{C; \Delta\}.$$

Riferiamoci da ultimo a due curve Γ, Δ, tracciate sulla sviluppabile Σ circoscritta a C, che siano e n t r a m b e s e m i a l g e b r i c h e e precisamente ottenibili come sezioni di Σ con due ipersuperficie algebriche di ordini h, k (≥ 1) arbitrari. Alle tre curve C, Γ, Δ si può attaccare l'invariante proiettivo dato (con ovvi significati dei simboli) da

$$\{C\,;\Gamma\,,\Delta\} = \oint_C \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} [C_t\,;O\,,M_i\,,N_j]\,dt\,,$$

dove t denota un qualunque parametro uniformizzante lungo C, ad esempio l'arco s. Ebbene, avuto riguardo alla (4) e con argomentazioni analoghe a quelle dianzi svolte per stabilire la (8), si perviene subito al

TEOREMA VII. *Se* Γ, Δ *denotano curve semialgebriche qualsiansi tracciate sulla sviluppabile circoscritta ad una curva chiusa* C *di classe* $\mathscr{C}^1$, *ciascuno degli invarianti* $\{C\,;\Gamma\}$, $\{C\,;\Delta\}$, $\{C\,;\Gamma\,,\Delta\}$ *risulta sempre uguale allo zero*.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BOMPIANI (1972_1) – *Sul carattere proiettivo del rapporto plurisezionale*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», (8), *52*, 150–155.

[2] C. LONGO (1942) – *Su alcune proprietà del rapporto plurisezionale*, «Rendic. di Mat.» (5), *3*, 90–97.