Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Laura Benevento

Sul problema del tipo di Dirichlet per una classe di operatori ellittico parabolici di ordine 2 s

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.5, p. 392–395.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_5_392_0>

Equazioni a derivate parziali. — *Sul problema del tipo di Dirichlet per una classe di operatori ellittico parabolici di ordine 2 s.* Nota di MARIA LAURA BENEVENTO, presentata (*) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — An existence theorem is given for boundary problem in the title, with the help of a small parameter method.

In alcune Memorie (cfr. [4], [5], [6]), A. Canfora si è occupato del problema del tipo di Dirichlet per una classe di operatori L, ellittico-parabolici di ordine $2m$, in un aperto limitato Ω di classe C^{2m}. Tali operatori sono a coefficienti reali e verificano la condizione:

$$(u\,,\mathrm{L}u)_\Omega \geq \mathrm{K}\,\|u\|_\Omega^2 \qquad \forall u \in \mathrm{H}_0^m(\Omega) \cap \mathrm{H}^{2m}(\Omega) \tag{1}$$

essi, nelle parti di Ω in cui non sono ellittici, degenerano soltanto in una direzione.

Recentemente M. L. Benevento, T. Bruno, L. Castellano (cfr. [2]) hanno studiato, limitatamente al caso del quarto ordine, lo stesso problema in relazione ad operatori ellittico-parabolici di tipo più generale; questi ultimi sono vincolati soltanto ad essere quasi ellittici nelle zone di degenerazione, oltre a verificare la condizione (1).

In tutte le Memorie citate la parte della frontiera di Ω adiacente al dominio di degenerazione è costituita dall'unione di porzioni iperpiane normali ad assi coordinati; inoltre i coefficienti di L hanno la regolarità sufficiente perché abbiano senso gli operatori L^*, aggiunti formali degli operatori L.

I risultati conseguiti sono teoremi di esistenza di una soluzione debole, avente proprietà di regolarità tali da consentirle di verificare quasi ovunque l'equazione e le condizioni al contorno; c'è da aggiungere che per stabilire tali teoremi vengono fatte su taluni dei coefficienti di L, nelle zone di degenerazione, ulteriori ipotesi che limitano alquanto la generalità degli operatori trattati; ciò avviene in modo consistente in [6] dove gli operatori che intervengono sono di ordine qualunque. Mi sono allora proposta di estendere il risultato di [6] ad operatori del tipo considerato in [2] senza ricorrere alle ipotesi aggiuntive cui ho già accennato.

In questa Nota illustro i risultati che ho conseguito in questa direzione.

Sia L un operatore differenziale di ordine $2s$, a coefficienti reali:

$$\mathrm{L} = \sum_{|\alpha| \leq 2s} a_\alpha(x')\,\mathrm{D}^\alpha \qquad x' \in \mathrm{R}^{n+1}$$

il quale sia ellittico-parabolico in un aperto limitato Ω di R^{n+1}, la cui frontiera risulti di classe C^{2s}.

(*) Nella seduta del 13 novembre 1976.

Supponiamo verificate le seguenti ipotesi:

a) *per i coefficienti* a_α *di* L *risulti*:

$$a_\alpha(x') \in C^{|\alpha|}(\overline{\Omega}) \qquad \forall \alpha: |\alpha| \leq 2s;$$

b) *indicata con* φ *una generica funzione reale di classe* $C_0^\infty(\Omega)$, *si abbia*:

$$(\varphi, L\varphi) \geq a \|\varphi\|^2$$

a *essendo una costante positiva indipendente da* φ;

c) *si abbia* $\overline{\Omega} = E \cup D$, *dove* E *è un aperto su* $\overline{\Omega}$ *nel quale* L *risulta ellittico di ordine* $2s$ *e* D *è un dominio la cui intersezione con la frontiera* $\partial\Omega$ *di* Ω *è una regione contenuta nell'iperpiano* $x'_{n+1} = 0$ *e tale che nei suoi punti la normale interna a* Ω *è equiversa all'asse* x'_{n+1};

d) *in* D *l'operatore* L *risulti quasi ellittico: esista cioè un multiindice* $(m_1, m_2, \cdots, m_{n+1})$ *di* R^{n+1}, *a componenti intere positive, tale che posto*:

$$m = \max_{i \in \{1, \cdots, n+1\}} m_i \quad , \quad \varkappa' = \left(\frac{m}{m_1}, \cdots, \frac{m}{m_{n+1}}\right), \ \langle \alpha, \varkappa \rangle = \alpha \cdot \varkappa'$$

nei punti di D *si abbia*:

$$\text{(2)} \qquad L = \sum_{\langle \alpha, \varkappa' \rangle \leq m} a_\alpha(x') D^\alpha$$

e inoltre sia verificata la diseguaglianza:

$$\text{(3)} \qquad \left| \sum_{\langle \alpha, \varkappa' \rangle = m} i^{|\alpha|} a_\alpha(x') \xi'^\alpha \right| \geq \nu \sum_{i=1}^{n+1} |\xi'_i|^{m_i}$$

uniformemente rispetto a $\xi' \in R^{n+1}$ *e a* $x' \in D$.

Ciò posto, indichiamo con $b(x')$ il coefficiente di $D_{x'_{n+1}}^{m_{n+1}}$ in L ed osserviamo che a causa della (2) si ha:

$$b(x') \neq 0 \qquad \forall x' \in D;$$

da ciò, per la continuità di $b(x')$, traiamo che tale coefficiente ha segno costante nel dominio D.

Consideriamo allora il numero r così definito:

$$\text{(4)} \qquad r = \begin{cases} \dfrac{m_{n+1}}{2} & \text{se } m_{n+1} \text{ è pari} \\[2ex] \dfrac{m_{n+1} + 1}{2} & \text{se } \operatorname{Im} i^{m_{n+1}} b(x') > 0 \\[2ex] \dfrac{m_{n+1} - 1}{2} & \text{se } \operatorname{Im} i^{m_{n+1}} b(x') < 0, \end{cases}$$

orbene, il problema del tipo di Dirichlet per l'operatore L è il seguente:

$$(5)\qquad \begin{cases} Lu = f & f \in L^2(\Omega) \\ D_\nu^{j-1} u \,|_{\partial E - D} = 0 & j = 1, \cdots, s \\ D_\nu^{j-1} u \,|_{\partial D - \bar{E}} = 0 & j = 1, \cdots, r \end{cases}$$

dove ν è la normale esterna a $\partial\Omega$.

Nel problema (5) gli operatori di frontiera verificano la condizione complementare rispetto all'operatore L; ciò è evidente per quanto concerne i punti di $\partial E - D$, mentre, per quanto concerne i punti di $\partial D - \bar{E}$, discende dal fatto che per l'ipotesi *a*) e per la (4) r è proprio il numero delle radici con parte immaginaria positiva dell'equazione:

$$(6)\qquad \sum_{\langle\alpha, \varkappa'\rangle = m} a_\alpha(x')\,(i\xi')^\alpha = 0$$

nell'incognita ξ'_{n+1}, per $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in R^n$ (1).

È evidente poi che il problema aggiunto del problema (5) ha la seguente formulazione:

$$(7)\qquad \begin{cases} L^* v = g & g \in L^2(\Omega) \\ D_\nu^{j-1} u \,|_{\partial E - D} = 0 & j = 1, \cdots, s \\ D_{x'_{n+1}}^{j-1} \,|_{\partial D - \bar{E}} & j = 1, \cdots, m_{n+1} - r \end{cases}$$

L^* essendo l'aggiunto formale di L.

Denotiamo ora con $\mathscr{H}(\Omega)$ la classe delle funzioni $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ verificanti le condizioni al contorno del problema (7), le quali risultino nulle in un intorno $n+1$ dimensionale di $\partial\Omega \cap (D \cap \bar{E})$.

Chiameremo soluzione debole del problema (5) una funzione u, di classe $L^2(\Omega)$, per la quale si abbia:

$$(u, L^* v)_\Omega = (f, v)_\Omega \qquad \forall v \in \mathscr{H}(\Omega).$$

Orbene sussiste il seguente:

TEOREMA. *Nelle ipotesi a), b), c), d) e nell'ulteriore ipotesi:*

e) *l'equazione* (6) *è sprovvista di radici multiple per* $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in R^n - \{0\}$,

il problema (5) *ammette una soluzione debole la quale ha, in* $L^2_{loc}(\bar{\Omega} - D \cap \bar{E})$ *tutte le derivate che figurano formalmente in* L *e verifica quasi ovunque l'equazione e le condizioni al contorno.*

La dimostrazione di questo Teorema è contenuto in una Memoria di prossima pubblicazione su « Ricerche di Matematica »; il metodo di cui mi sono servita per stabilirlo si discosta alquanto da quello seguito nelle Memorie cui ho già fatto riferimento; esso consiste nell'approssimazione dell'operatore L mediante un operatore L_ε ellittico in $\Omega \cup D$ e di ordine superiore a quello di L;

(1) Cfr. [10].

ad esso vengono associate, oltre alle condizioni al contorno del problema (5), altre di ordine superiore a quello di L, in modo che esse siano prive di senso per le soluzioni del problema (5). Ciò, secondo un'osservazione di J. J. Khon e L. Niremberg (cfr. 7) è condizione necessaria perché la soluzione approssimante u_ε abbia equilimitate rispetto a ε in $L^2_{loc}(D - \overline{E})$, tutte le derivate che figurano formalmente in L.

È proprio tale requisito della soluzione approssimante, ottenuto con opportuni accorgimenti, che mi consente di pervenire al teorema in un unico tempo, senza il ricorso a procedimenti di induzione, come di fatto avviene in [6].

Il Teorema ora esposto contiene tutti quelli similari conseguiti nelle Memorie già citate; in particolare contiene quello di [6] anche nel caso di una sola variabile di degenerazione e quello di [2] anche nel caso di operatori del quarto ordine.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON (1965) – *Lectures on elliptic boundary value problems*, D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton.

[2] M. L. BENEVENTO, T. BRUNO e L. CASTELLANO (1975) – *Sul problema del tipo di Dirichlet per una classe di operatori ellittico-parabolici del IV ordine degeneri in una o più direzioni*, « Ricerche di Math. », *24*, 280–340.

[3] L. BIANCHI (1901) – *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*, Ed. Spoerri.

[4] A. CANFORA (1972) – *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine*, I, « Ricerche di Math. », *21*, 86–156.

[5] A. CANFORA (1973) – *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine*, II, « Ricerche di Math. », *22*, 3–68.

[6] A. CANFORA (1974) – *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici di ordine 2m*, « Ann. di Math. », *50*, 45–127.

[7] J. J. KHON e L. NIREMBERG (1967) – *Degenerate elliptic-parabolic equations of second order*, « Comm. Pure and Applied Math. », *20*, 797–872.

[8] J. L. LIONS e E. MAGENES (1968) – *Problèmes aux limites non homogènes*, Vol. I e II, Dunod Éditeur, Paris.

[9] T. MACROBERT (1962) – *Functions of a complex variable*, MacMillan, London.

[10] T. MATSUZAWA (1968) – *On quasi-elliptic boundary problems*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *133*, 241–265.

[11] C. MIRANDA (1975) – *Problemi di esistenza in Analisi Funzionale*, Scuola Norm. Sup. Pisa.

[12] C. MIRANDA (1962) – *Teoremi di unicità in domini non limitati e teoremi di Liouville per le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche*, « Ann. di Math. », *59*.

[13] J. NEČAS (1967) – *Les methodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et C^ie^, Editeurs, Paris; Academia Éditeurs, Prague.

[14] M. TROISI (1969) – *Teoremi di inclusione negli spazi di Sobolev con peso*, « Ricerche di Math », *18*, 49–74.

[15] M. TROISI (1969) – *Problemi ellittici con dati singolari*, « Ann. di Math. », *83*, 363–407.

[16] M. TROISI (1971) – *Problemi al contorno con condizioni omogenee per le equazioni quasi ellittiche*, « Ann. di Math. », *40*, 331–412.