Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Silvana Abeasis, Alberto Del Fra

Osservazioni sul tipo omotopico dei G-CW-complessi e dei G-ANR

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.1-2, p. 62–66.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_1-2_62_0>

Topologia. — *Osservazioni sul tipo omotopico dei* G–CW–*complessi e dei* G–ANR (*). Nota (**) di SILVANA ABEASIS e ALBERTO DEL FRA, presentata dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — We prove that a countable G–CW–complex is G–homotopically equivalent to a G–ANR, when G is a finite group with a free action.

J. Milnor ha provato [3] che i CW–complessi numerabili hanno lo stesso tipo omotopico degli ANR e dei poliedri localmente finiti e numerabili. D'altra parte R. Palais [4] e G. Bredon [1] hanno considerato le nozioni di G–ANR e rispettivamente di G–CW–complesso e di G–poliedro.

Noi ci proponiamo di provare in questo ambito l'analogo del risultato di Milnor, nell'ipotesi che il gruppo G sia finito e che le azioni considerate siano libere. Queste ipotesi da una parte permettono di riprodurre per i G–ANR i risultati noti per gli ANR e dall'altra di utilizzare i risultati di Milnor facendo uso del fatto che il fibrato associato ad G–spazio è in questo caso un rivestimento. Da questo punto di vista i risultati che qui si ottengono erano in certa misura prevedibili.

1. Supporremo sempre che gli spazi in esame siano metrici separabili. Gli oggetti che ci interessano sono i G–spazi, ossia spazi su cui opera un gruppo G, gruppo che supporremo d'ora in poi finito e con azione libera (alcuni risultati parziali sono veri anche nell'ipotesi che G sia un gruppo numerabile).

Se X è un G–spazio denoteremo con X/G lo spazio delle orbite, e come conseguenza dell'ipotesi su G avremo che la proiezione X $\rightarrow$ X/G è un rivestimento finito con fibra G.

Ricordiamo che un G–CW–complesso è un CW–complesso X su cui il gruppo G opera con un'azione (nel nostro caso libera) cellulare (cfr. [1], p. 1.1). In modo analogo si ottiene la nozione di G–poliedro. Lo spazio delle orbite di un G–CW–complesso è un CW–complesso.

Un G–spazio X è un G–ANR se per ogni coppia di G–spazi (Y , A), con A sottospazio chiuso di Y, e per ogni applicazione equivariante f: A $\rightarrow$ X esiste un'estensione equivariante di f ad un sotto G–spazio aperto E di Y contenente A (cfr. [4], p. 25). Un G–spazio si dice un G–ANR locale se ogni punto $x \in$ X ha un intorno che è un G–ANR.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca del C.N.R., «Strutture algebriche e Geometriche e loro Applicazioni».

(**) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1976.

Ricordiamo inoltre che date due applicazioni equivarianti fra due G–spazi $f_1, f_2 : X \to Y$, una omotopia $H : X \times I \to Y$ tra f_1 e f_2 è una G–omotopia se H è equivariante rispetto all'azione di G su $X \times I$ data da $g(x, t) = (gx, t)$ $g \in G$, $x \in X$, $t \in I$. Se tra le applicazioni f_1 e f_2 esiste una G–omotopia, diremo allora che f_1 è G–omotopa a f_2 e scriveremo $f_1 \underset{G}{\simeq} f_2$. Da quest'ultima definizione si ricava la corrispondente nozione di G–equivalenza omotopica.

Ci proponiamo di dimostrare il seguente:

1.1. TEOREMA. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti*:

a) X *è* G–*omotopicamente equivalente ad un* G–CW–*complesso numerabile.*

b) X *è* G–*omotopicamente equivalente ad un* G–*poliedro localmente finito e numerabile.*

c) X *è* G–*omotopicamente equivalente ad un* G–ANR.

La dimostrazione del teorema poggia su alcuni lemmi che passiamo ad illustrare.

1.2. LEMMA. *Se* X *è un* G–*spazio ed* X/G *un poliedro localmente finito e numerabile, allora* X *è un* G–*poliedro localmente finito e numerabile.*

Basta osservare che sopra ogni simplesso chiuso della triangolazione di X/G il rivestimento $X \to X/G$ è banale e pertanto la triangolazione si solleva canonicamente da X/G ad X in modo tale da rendere X un G–poliedro (localmente finito e numerabile).

1.3. LEMMA. *Sia* X *un* G–*spazio*, $f : Y \to X/G$ *un'applicazione*, $f^* X \to Y$ *il fibrato indotto del fibrato* $X \to X/G$ *tramite* f. *Se* f *è un'equivalenza omotopica, allora i* G–*spazi* X *e* $f^* X$ *sono* G–*omotopicamente equivalenti.*

Sia $g : X/G \to Y$ un'inversa omotopica di f. Si ha il seguente diagramma di fibrati indotti

$$\begin{tikzcd} g^* f^* X \arrow[r, "\hat{g}"] \arrow[d] & f^* X \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\pi"] \\ X/G \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, "f"'] & X/G \end{tikzcd}$$

Sia h un'omotopia tra l'applicazione identica $1_{X/G}$ ed fg e sia $h^* X \to X/G \times I$ il fibrato indotto da h. Tale fibrato è isomorfo al fibrato $\pi \times \mathrm{id} : X \times I \to X/G \times I$, in quanto h è omotopa alla proiezione $p_1 : X/G \times I \to X/G$.

In definitiva si ha il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
X \times I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr] & h^* X \arrow[r, "\hat h"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
 & X/G \times I \arrow[r, "h"'] & X/G
\end{tikzcd}$$

ove $\hat h$ è il morfismo canonico (applicazione equivariante) relativo al fibrato indotto da h e φ realizza l'equivalenza suddetta tra i fibrati in questione. Dal diagramma risulta che $\hat h\varphi$ realizza una G–omotopia tra 1_X e l'applicazione $\hat f \hat g \varphi_1$, essendo $\varphi_1 = \varphi\,|_{X\times\{1\}}$.

Consideriamo ora il diagramma di fibrati indotti.

$$\begin{tikzcd}
f^* g^* f^* X \arrow[r, "\bar f"] \arrow[d] & g^* f^* X \arrow[r, "\hat g"] \arrow[d] & f^* X \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "f"] & X/G \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

ed indichiamo con k un'omotopia tra 1_Y e gf. Si ottiene ovviamente anche in questo caso una G–omotopia tra 1_{f^*X} e $\hat g \bar f \psi_1$, ove $\psi_1 = \psi\,|_{f^*X\times\{1\}}$ avendo indicato con ψ un'equivalenza tra i G–fibrati $f^*\,X \times I \to Y \times I$, $k^* f^*\,X \to Y \times I$.

Concludendo abbiamo:

$$\hat f\,(\hat g\varphi_1) \underset{G}{\simeq} 1_X \;, \quad \hat g \bar f \psi_1 \underset{G}{\simeq} 1_{f^*X} \qquad \text{ovvero} \qquad (\hat g\varphi_1)\,\varphi_1^{-1}\bar f\psi_1 \underset{G}{\simeq} 1_{f^*X}\,.$$

Poiché $\hat g\varphi_1$ ammette una G–inversa omotopica sia destra che sinistra, essa realizza una G–equivalenza omotopica $X \underset{G}{\simeq} f^*\,X$.

1.4. Lemma. X *è un* G–ANR *se e solo se è un* G–ANR *locale.*

Non diamo la dimostrazione di tale asserzione in quanto essa può ottenersi con le stesse tecniche usate per gli spazi ANR da O. Hanner ([2], Teorema 3.2), apportandovi ovvie modifiche.

1.5. Lemma. X *è un* G–ANR *se e solo se è un* G*–spazio ad un* ANR.

Sia X un G–spazio ed un ANR. Preso $x \in X$ sia V un'intorno aperto di x scelto in modo tale che gli aperti $g_i V$ siano disgiunti, $g_i \in G$ $(i = 1, \cdots, n)$ con g_1 elemento neutro di G (questo è sempre possibile visto che l'azione del gruppo finito G è libera). Poiché V è un aperto di un ANR esso risulta un

ANR (cfr. [2], Lemma 3.1). Considerato il sotto–G–spazio di X $W = \bigcup_{k=1}^{n} g_k V$ proviamo che esso è un G–ANR. Sia infatti (Y, A) una coppia di G–spazi con A chiuso in Y ed $f: A \to W$ un'applicazione continua equivariante. Detto $A_k = f^{-1}(g_k V)$ esso risulta chiuso in A e quindi in Y. Consideriamo l'applicazione $f_1 = f|_{A_1} : A_1 \to g_1 V = V$; essa, poiché V è un ANR, si può estendere ad un'applicazione $f_1^* : E_1 \to V$, essendo E_1 un aperto in Y contenente A_1. Per normalità di Y possiamo sempre supporre $\bigcap_{k=1}^{n} g_k E_1 = \varnothing$.

Indichiamo ora con $f_k^* : g_k E_1 \to g_k V$ le applicazioni definite da

$$f_k^*(g_k y) = g_k f_1^*(y) \qquad y \in E_1 .$$

L'applicazione $f^* : \bigcup_{k=1}^{n} g_k E_1 \to W$ definita da $f^*|_{g_k E_1} = f_k^*$ è una estensione equivariante di f al sotto–G–spazio aperto $\bigcup_{k=1}^{n} g_k E_1$ di Y contenente A. Resta così provata per X la proprietà di G–ANR locale e quindi di G–ANR.

Viceversa supponiamo ora che X sia un G–ANR. Proviamo che è un ANR. Sia (Y, A) una coppia di spazi ed $f: A \to X$ un'applicazione continua. Nel prodotto $G \times Y$ introduciamo la struttura ovvia di G–spazio data dalla moltiplicazione sul primo fattore e consideriamo l'applicazione equivariante $\hat{f}: G \times A \to X$ definita da $\hat{f}(g, a) = gf(a)$.

Poiché X è un G–ANR la $\hat{f}$ si estende equivariantemente ad un intorno aperto di $G \times A$ che possiamo sempre supporre essere della forma $G \times E$, con E aperto in Y contenente A; indichiamo con $\hat{f}^*: G \times E \to X$ tale estensione. L'applicazione $f^* : E \to X$ data da $f^*(y) = \hat{f}^*(g_1, y)$ fornisce l'estensione cercata.

1.6. LEMMA. *X è un* G–ANR *se e solo se* X/G *è un* ANR.

La dimostrazione discende immediatamente dalle proprietà dei rivestimenti e dai Lemmi 1.4 e 1.5.

2. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.1

a) $\Rightarrow$ *b*). Se X è un G–CW–complesso numerabile, allora X/G è un CW–complesso numerabile e quindi risulta omotopicamente equivalente ad un poliedro P localmente finito e numerabile (cfr. [3], Teorema 1). Sia $f: P \to X/G$ una tale equivalenza omotopica. Allora la spazio totale $f^* X$ del fibrato indotto da f (cfr. Lemma 1.2) è un G–poliedro localmente finito e numerabile ed inoltre è G–omotopicamente equivalente ad X (cfr. Lemma 1.3).

b) $\Rightarrow$ *c*). Se X è un G–poliedro localmente finito e numerabile esso risulta un G–spazio ed un ANR (cfr. [2], Corollario 3.5), pertanto è per il Lemma 1.5 un G–ANR.

c) ⇒ *a*). Se X è un G–ANR, per il Lemma 1.6 X/G è un ANR e quindi è omotopicamente equivalente ad un poliedro P localmente finito e numerabile (cfr. [3], Teorema 1). I Lemmi 1.2 e 1.3 permettono quindi di provare l'asserzione.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. E. BREDON (1967) – *Equivariant Cohomology Theories*, « Lecture Notes in Mathematics », Springer, *34*.

[2] O. HANNER (1950) – *Some theorems on absolute neighborhood retracts*, « Ark. Mat. », *1*, 389–408.

[3] J. MILNOR (1959) – *On spaces having the homotopy type of a* CW*–complex*, « Trans. of the Am. Math. Soc. », *90*, 272–280.

[4] R. PALAIS (1960) – *The classification of* G*–spaces*, « Mem. of Am. Math. Soc. ».