Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanna Boschi Pettini

Ancora sull'integrazione di equazioni della meccanica a coefficienti lentamente variabili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.6, p. 798–801.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_6_798_0>

Meccanica. — *Ancora sull'integrazione di equazioni della meccanica a coefficienti lentamente variabili.* Nota di GIOVANNA BOSCHI PETTINI, presentata (*) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — On the basis of the results of a previous article, it has been obtained an approximate explicit expression of the lagrangian parameters Q_i and their time-derivatives $\dot{Q}_i$ with errors of order ε^2. All that has been achieved for a mechanical system possessing two degrees of freedom and subjected to slowly time-variable constraints.

1. In una Nota precedente [1], alla quale rimando per il significato delle notazioni e di alcune locuzioni, ho ottenuto l'integrazione, in seconda approssimazione, delle equazioni di un sistema meccanico a due gradi di libertà, lineari, però con coefficienti lentamente variabili col tempo (1). In sostanza, dette Q_1 e Q_2 le coordinate lagrangiane del sistema (più precisamente le coordinate normali se da un certo istante in poi i coefficienti rimanessero costanti), ho posto:

$$(1) \qquad Q_1 = \frac{1}{\sqrt{\omega_1}}\,(u_1 \operatorname{sen} \theta_1 + v_1 \cos \theta_1) \quad , \quad \dot{Q}_1 = \sqrt{\omega_1}\,(u_1 \cos \theta_1 - v_1 \operatorname{sen} \theta_1)$$

e formule analoghe per Q_2 e $\dot{Q}_2$; ω_1 e ω_2 sono funzioni del tempo, che ho chiamato frequenze istantanee del sistema (perchè, se i coefficienti fossero costanti, si ridurrebbero alle frequenze proprie del sistema), θ_1 e θ_2 sono espresse da:

$$(1') \qquad \theta_1 = \int_0^t \omega_1 \, dt \quad , \quad \theta_2 = \int_0^t \omega_2 \, dt$$

infine u_1 e v_1 sono funzioni del tempo che ho determinato in seconda approssimazione o, più precisamente, con un errore dell'ordine di ε^2 (che scriverò $O(\varepsilon^2)$) per un intervallo dell'ordine di $1/\varepsilon$.

Ora, nell'approssimazione sopra indicata (cfr. (31) e (32) di [1]) u_1 e v_1 risultano espresse da una combinazione lineare (con coefficienti variabili al trascorrere del tempo) dei valori iniziali delle u e v e di funzioni trigonometriche (seni e coseni) di $2\theta_1, 2\theta_2, \alpha = \theta_1 + \theta_2, \beta = \theta_1 - \theta_2$.

Sembrerebbe perciò, dalle (1), e con ovvia applicazione delle formule di prostaferesi, che nelle espressioni di Q_1 e $\dot{Q}_1$ debbano intervenire anche seni e coseni di $3\theta_1, 3\theta_2, 2\theta_1 + \theta_2, \theta_1 + 2\theta_2, 2\theta_1 - \theta_2$ ecc... cioè termini di frequenza istantanea tripla o con frequenza istantanea di combinazione.

(*) Nella seduta del 10 giugno 1976.

(1) Cioè i coefficienti sono funzioni di εt, dove t è il tempo, ε un parametro positivo molto piccolo.

In questa Nota ho determinato esplicitamente, sempre a meno di $O(\varepsilon^2)$, Q_1 e $\dot{Q}_1$, ottenendo una formula relativamente semplice in cui le Q e le loro derivate rispetto al tempo risultano una combinazione lineare omogenea di $\operatorname{sen}\theta_1$, $\cos\theta_1$, $\operatorname{sen}\theta_2$, $\cos\theta_2$ con coefficienti variabili lentamente col tempo; in altre parole, non esistono, come appare intuitivo, nella Q e $\dot{Q}$ termini di frequenza istantanea tripla o di frequenza di combinazione.

2. Sostituendo nella prima delle (1) i valori di u_1 e v_1 espressi da (31), (32) della Nota [1], e dopo un semplice scambio dell'ordine dei termini, si ha:

$$
\begin{aligned}
(2)\quad Q_1 = \frac{1}{\sqrt{\omega_1}} \Bigg\{ & u_{10}\operatorname{sen}\theta_1 + v_{10}\cos\theta_1 + \left(\frac{\dot{\omega}_1}{4\omega_1^2}\right)_0 (u_{10}\cos\theta_1 + v_{10}\operatorname{sen}\theta_1) + \\
& + \frac{\dot{\omega}_1}{4\omega_1^2}\Big[v_{10}(\operatorname{sen}2\theta_1\cos\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_1\cos 2\theta_1) - u_{10}(\cos 2\theta_1\cos\theta_1 + \operatorname{sen}2\theta_1\operatorname{sen}\theta_1)\Big] + \\
& + (v_{10}\operatorname{sen}\theta_1 - u_{10}\cos\theta_1)\int_0^t \frac{\dot{\omega}_1^2}{8\omega_1^3}\,dt + \frac{1}{2}\varepsilon^2(v_{10}\operatorname{sen}\theta_1 - u_{10}\cos\theta_1)\int_0^t \frac{\gamma_{11}}{\omega_1}\,dt + \\
& + \frac{1}{2}\varepsilon\lambda\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\Bigg[\frac{u_{20}}{\Omega_1}(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta_1 + \cos\alpha\cos\theta_1) + \frac{v_{20}}{\Omega_1}(\cos\alpha\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\alpha\cos\theta_1) + \\
& + \frac{u_{20}}{\Omega_2}(\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta_1 + \cos\beta\cos\theta_1) + \frac{v_{20}}{\Omega_2}(\operatorname{sen}\beta\cos\theta_1 - \cos\beta\operatorname{sen}\theta_1)\Bigg] - \\
& - \frac{1}{4}\varepsilon^2\int_0^t \lambda^2\frac{\Omega_1+\Omega_2}{\Omega_1\Omega_2}\,dt\,(v_{10}\operatorname{sen}\theta_1 - u_{10}\cos\theta_1) - \\
& - \frac{1}{2}\varepsilon\left(\lambda\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\right)_0\left[-v_{20}\left(\frac{\Omega_1-\Omega_2}{\Omega_1\Omega_2}\right)_0\operatorname{sen}\theta_1 + u_{20}\left(\frac{\Omega_1+\Omega_2}{\Omega_1\Omega_2}\right)_0\cos\theta_1\right]\Bigg\} + O(\varepsilon^2)\,.
\end{aligned}
$$

Poichè, ricordando i valori citati di α, β, Ω_1 e Ω_2 (cfr. (9) di [1]) si ha:

$$
(3)\qquad \alpha - \theta_1 = \theta_2 \quad , \quad \beta - \theta_1 = -\theta_2\,,
$$
$$
\frac{\Omega_1+\Omega_2}{\Omega_1\Omega_2} = \frac{2\omega_1}{\omega_1^2-\omega_2^2} \quad , \quad \frac{\Omega_1-\Omega_2}{\Omega_1\Omega_2} = \frac{2\omega_2}{\omega_1^2-\omega_2^2}
$$

sostituendo nella (2) e applicando ben note formule trigonometriche, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
(4)\quad Q_1 = \frac{1}{\sqrt{\omega_1}}\Bigg\{ & u_{10}\operatorname{sen}\theta_1 + v_{10}\cos\theta_1 + \\
& + \left(\frac{\dot{\omega}_1}{4\omega_1^2}\right)_0 (u_{10}\cos\theta_1 + v_{10}\operatorname{sen}\theta_1) + (v_{10}\operatorname{sen}\theta_1 - u_{10}\cos\theta_1)\times
\end{aligned}
$$

$$\times \left[\frac{\dot{\omega}_1}{4\omega_1^2} + \int_0^t \frac{\dot{\omega}_1^2}{8\omega_1^3} dt + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^t \frac{\gamma_{11}}{\omega_1} dt - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^t \lambda^2 \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} dt \right] +$$

$$+ \varepsilon\lambda \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} (u_{20} \cos \theta_2 - v_{20} \operatorname{sen} \theta_2) - \varepsilon \left(\lambda \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \right)_0 \times$$

$$\times \left[-v_{20} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right)_0 \operatorname{sen} \theta_1 + u_{20} \left(\frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right)_0 \cos \theta_1 \right] \Bigg\} + O(\varepsilon^2).$$

3. In modo analogo si procede per il calcolo di $\dot{Q}_1$.

Sempre tenendo conto delle (31) e (32) della Nota citata, dalla seconda delle (1) si ha:

$$\dot{Q}_1 = \sqrt{\omega_1} \Bigg\{ u_{10} \cos \theta_1 - v_{10} \operatorname{sen} \theta_1 + \left(\frac{\dot{\omega}_1}{4\omega_1^2} \right)_0 (v_{10} \cos \theta_1 - u_{10} \operatorname{sen} \theta_1) - \tag{5}$$

$$- \frac{\dot{\omega}_1}{4\omega_1^2} \left[u_{10} (\cos \theta_1 \operatorname{sen} 2\theta_1 - \operatorname{sen} \theta_1 \cos 2\theta_1) + v_{10} (\cos \theta_1 \cos 2\theta_1 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} 2\theta_1) \right] +$$

$$+ (u_{10} \operatorname{sen} \theta_1 + v_{10} \cos \theta_1) \int_0^t \frac{\dot{\omega}_1^2}{8\omega_1^3} dt + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (u_{10} \operatorname{sen} \theta_1 + v_{10} \cos \theta_1) \int_0^t \frac{\gamma_{11}}{\omega_1} dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon\lambda \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \left[\frac{u_{20}}{\Omega_1} (\operatorname{sen} \alpha \cos \theta_1 - \cos \alpha \operatorname{sen} \theta_1) + \frac{v_{20}}{\Omega_1} (\cos \alpha \cos \theta_1 + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{u_{20}}{\Omega_2} (\operatorname{sen} \beta \cos \theta_1 - \cos \beta \operatorname{sen} \theta_1) - \frac{v_{20}}{\Omega_2} (\cos \beta \cos \theta_1 + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta_1) \right] -$$

$$- \frac{1}{4} \varepsilon^2 \int_0^t \lambda^2 \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1 \Omega_2} dt \, (u_{10} \operatorname{sen} \theta_1 + v_{10} \cos \theta_1) +$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon \left(\lambda \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \right)_0 \left[u_{20} \left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1 \Omega_2} \right)_0 \operatorname{sen} \theta_1 + v_{20} \left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\Omega_1 \Omega_2} \right)_0 \cos \theta_1 \right] \Bigg\} + O(\varepsilon^2).$$

Quindi, tenuto conto delle (3), l'espressione di $\dot{Q}_1$ diviene:

$$\dot{Q}_1 = \sqrt{\omega_1} \Bigg\{ u_{10} \cos \theta_1 - v_{10} \operatorname{sen} \theta_1 + \tag{6}$$

$$+ \left(\frac{\dot{\omega}_1}{4\omega_1^2} \right)_0 (v_{10} \cos \theta_1 - u_{10} \operatorname{sen} \theta_1) + (u_{10} \operatorname{sen} \theta_1 + v_{10} \cos \theta_1) \times$$

$$\times \left[- \frac{\dot{\omega}_1}{4\omega_1^2} + \int_0^t \frac{\dot{\omega}_1^2}{8\omega_1^3} dt + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^t \frac{\gamma_{11}}{\omega_1} dt - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^t \lambda^2 \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} dt \right] -$$

$$-\varepsilon\lambda\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\cdot\frac{\omega_2}{\omega_1^2-\omega_2^2}(u_{20}\operatorname{sen}\theta_2+v_{20}\cos\theta_2)+\varepsilon\left(\lambda\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\right)_0\times$$

$$\times\left[u_{20}\left(\frac{\omega_1}{\omega_1^2-\omega_2^2}\right)_0\operatorname{sen}\theta_1+v_{20}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1^2-\omega_2^2}\right)_0\cos\theta_1\right]\Bigg\}+O(\varepsilon^2).$$

Le (4) e (6) esprimono, come si è detto nell'introduzione, e a meno di $O(\varepsilon^2)$, Q_1 e $\dot{Q}_1$ come combinazione lineare a coefficienti lentamente variabili, di $\operatorname{sen}\theta_1$, $\cos\theta_1$, $\operatorname{sen}\theta_2$, $\cos\theta_2$, cioè, in sostanza, Q_1 e $\dot{Q}_1$ sono combinazioni lineari di termini di frequenza istantanea ω_1 e ω_2.

È bene aggiungere, che essendo all'istante $t=0$, $\theta_1(0)=0$, si ha, ponendo nella (1) $t=0$.

$$Q_1(0)=\frac{v_{10}}{\sqrt{\omega_1(0)}}\quad,\quad \dot{Q}_1(0)=\sqrt{\omega_1(0)}\,u_{10}.$$

Da tali relazioni si ricavano facilmente u_{10} e v_{10} mediante i valori iniziali di Q_1. Le formule sopra scritte e analoghe considerazioni valgono anche per Q_2 e $\dot{Q}_2$, salvo uno scambio di indici e sostituendo $-\lambda$ a λ.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOSCHI PETTINI GIOVANNA (1975) – *Integrazione, in seconda approssimazione, di equazioni della meccanica a coefficienti lentamente variabili*, « Atti Accad. Naz. Lincei », (5), 729–737.