Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Tallini Scafati

Sui k—insiemi di uno spazio di Galois $S_{r,q}$ a due soli caratteri nella dimensione d

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.6, p. 782–788.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_6_782_0>

Geometria. — *Sui k–insiemi di uno spazio di Galois* $S_{r,q}$ *a due soli caratteri nella dimensione* d (*). Nota di MARIA TALLINI SCAFATI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — The k-sets of $S_{r,q}$ such that the subspaces S_d ($d \leq r-1$) meet them at m or n points ($m < n$) are studied. Such sets are for $d \leq r-2$ completely characterized from a numerical point of view.

1. INTRODUZIONE

Sia K un k–insieme di uno spazio di Galois $S_{r,q}$ (con $q = p^h$, p primo, $r \geq 3$), con $K \neq \varnothing$, $K \neq S_{r,q}$. Posto $\theta_d = \sum_{i=1}^{d} q^i$, sia t_s^d ($s = 0, 1, \cdots, \theta_d$) il numero degli S_d ($1 \leq d \leq r-1$) di $S_{r,q}$ che intersecano K in s punti. Gli interi $t_0^d, t_1^d, \cdots, t_{\theta_d}^d$ prendono il nome di *caratteri* di K nella dimensione d. Diremo che K è ad l *caratteri nella dimensione* d, se esattamente l dei suoi caratteri sono diversi da zero. Più precisamente, siano $m_1, m_2, \cdots, m_l$ interi tali che $0 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_l \leq \theta_d$; diremo che K è di *tipo* $(m_1, m_2, \cdots, m_l)_d$ rispetto agli S_d, se risulta $t_m^d = 0$ per ogni n diverso da $m_1, m_2, \cdots, m_l$ e $t_m^d \neq 0$ per ogni $m = m_1, m_2, \cdots, m_l$ (cfr. [3], [4]).

Si dimostra (cfr. [3], [4], Prop. I) che K ha sempre almeno due caratteri, nella dimensione d, diversi da zero. Quindi nello studio dei k–insiemi di $S_{r,q}$, rispetto al comportamento con gli S_d, i primi che si presentano in ordine di difficoltà sono quelli a due caratteri, cioè i k–insiemi di tipi $(m, n)_d$. Di ciò appunto ci si occupa nel presente lavoro.

Dopo aver nel n. 2 esposto i necessari richiami, nel n. 3 si considerano i k–insiemi K di tipo $(m, n)_{r-1}$ di $S_{r,q}$: si danno limitazioni per k e si prova che necessariamente $n - m$ deve essere una potenza di p; introdotta poi la nozione di k^*–insieme *duale* di K, così definendosi l'insieme K^* degli iperpiani n–secanti K, si mostra che K^* in $S_{r,q}^*$ è ancora a due caratteri e che K^{**} in $S_{r,q}^{**}$ coincide con K a meno dell'isomorfismo canonico. Nel n. 4 si studiano i k–insiemi K di tipo $(m, n)_d$ di $S_{r,q}$ con $d \leq r-2$ e, poggiando sulla nozione di k^*–insieme duale di K, si prova che essi sono necessariamente a due caratteri rispetto alle rette. Da [5] segue allora che o K si riduce ad un punto, o ad un iperpiano, o al complementare di un punto o di un iperpiano, oppure deve essere q un quadrato dispari e k, m, n debbono essere dati dalla (4.3), (4.4), (4.5). Rimangono in tal modo completamente caratterizzati tutti i k–insiemi a due caratteri nella dimensione $d \leq r-2$, restando tuttavia aperta la questione di assegnare nei vari casi le loro effettive *costruzioni*.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale Strutture Geometriche e Algebriche e loro Applicazioni del C.N.R.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1976.

2. GENERALITÀ SUI k-INSIEMI DI $S_{r,q}$ DI TIPO $(m, n)_d$, CON $1 \leq d \leq r-1$

Sia K un k-insieme di $S_{r,q}$ di tipo $(m, n)_d$ rispetto agli S_d, con $1 \leq d \leq r-1$. Se è $m = 0$, K risulta necessariamente costituito da un sol punto ovvero dal complementare di un iperpiano (cfr. [3], n. 3, Prop. XIV); se è $n = \theta_d$, K risulta necessariamente costituito dal complementare di un punto ovvero da un iperpiano (cfr. [3], n. 3, Prop. XV). Possiamo dunque nel seguito supporre:

$$0 < m < n < \theta_d . \tag{2.1}$$

Denotati con t_m^d, t_n^d il numero degli S_d di $S_{r,q}$ rispettivamente m-secanti ed n-secanti K, tali interi soddisfano il seguente sistema (cfr. [3], n. 3, formule (21) e (8)):

$$\begin{cases} t_m^d + t_n^d = \prod_{i=0}^{d} \theta_{r-i}/\theta_{d-i} , \\ m t_m^d + n t_n^d = k \prod_{i=0}^{d-1} \theta_{r-1-i}/\theta_{d-1-i} , \\ m(m-1)\, t_m^d + n(n-1)\, t_n^d = k(k-1) \prod_{i=0}^{d-2} \theta_{r-2-i}/\theta_{d-2-i} . \end{cases} \tag{2.2}$$

Dalle prime due equazioni di (2.2) si ottiene:

$$t_n^d = \frac{(k\theta_d - m\theta_r)}{(n-m)\,\theta_d} \cdot \prod_{i=0}^{d-1} \theta_{r-1-i}/\theta_{d-1-i} , \tag{2.3}$$

$$t_m^d = \frac{(n\theta_r - k\theta_d)}{(n-m)\,\theta_d} \cdot \prod_{i=0}^{d-1} \theta_{r-1-i}/\theta_{d-1-i} . \tag{2.4}$$

Sostituendo le (2.3), (2.4) nelle terze delle (2.2) si ha che k deve soddisfare l'equazione:

$$x^2 - x\,[1 + (m+n-1)\,\theta_{r-1}/\theta_{d-1}] + mn\theta_r\, \theta_{r-1}/\theta_d\, \theta_{d-1} = 0. \tag{2.5}$$

Supposto $d \leq r-2$, si consideri un S_h di $S_{r,q}$, con $h \geq d+1$. Esso interseca K in un k'-insieme K' di S_h ancora di tipo $(m, n)_d$ (non potendo avere K' un solo carattere diverso da zero, valendo la (2.1), cfr. n. 1, secondo capoverso). Quindi k' soddisfa la (2.5) ove ivi si faccia $r = h$, cioè k' soddisfa la:

$$x^2 - x\,[1 + (m+n-1)\,\theta_{h-1}/\theta_{d-1}] + mn\theta_h\, \theta_{h-1}/\theta_d\, \theta_{d-1} = 0. \tag{2.6}$$

Ne segue che K è di tipo $(k_1, k_2)_h$ nella dimensione h, ove k_1, k_2 (con $k_1 < k_2$) sono le due radici della (2.6). Si è così provato che:

I. *Se* K *è un k-insieme di* $S_{r,q}$ *a due caratteri rispetto agli* S_d $(d \leq r-2)$, K *è a due caratteri rispetto agli* S_h *per ogni* $h = d+1, d+2, \cdots, r-1$.

3. I k–INSIEMI DI $S_{r,q}$ DI TIPO $(m, n)_{r-1}$

Per un k–insieme K di $S_{r,q}$ di tipo $(m, n)_{r-1}$ porremo per semplicità $t_n^{r-1} = t_n$ e $t_m^{r-1} = t_m$. Le (2.3), (2.4) per $d = r - 1$ diventano allora

$$t_n = (k\theta_{r-1} - m\theta_r)/(n - m), \tag{3.1}$$

$$t_m = (n\theta_r - k\theta_{r-1})/(n - m). \tag{3.2}$$

Essendo $t_n > 0$, $t_m > 0$ dalle (3.1), (3.2) si ottiene $m\theta_r < k\theta_{r-1} < n\theta_r$ e quindi, essendo $\theta_r = q\theta_{r-1} + 1$ e risultando (cfr. (2.1)) $m/\theta_{r-1} < 1$ ed $n\theta/_{r-1} < 1$, si ha:

$$1 + mq \leq k \leq nq. \tag{3.3}$$

Osserviamo che gli estremi di tale disuguaglianza sono effettivamente raggiunti per particolari k–insiemi di tipo $(m, n)_{r-1}$ di $S_{r,q}$.

Sia P un punto di K, denotati con v_m, v_n il numero degli iperpiani per P rispettivamente m–secanti ed n–secanti K, risulta:

$$v_m + v_n = \theta_{r-1}. \tag{3.4}$$

Sia N_P il numero di tutte le coppie (α, A), ove α è un iperpiano per P e A è un punto di $\alpha \cap K$ distinto da P. Fissato un punto $A \in K - \{P\}$ gli iperpiani α per A e per P sono in numero di θ_{r-2} e determinano altrettante coppie (α, A) tutte distinte, ne segue che è

$$N_P = (k - 1)\,\theta_{r-2}. \tag{3.5}$$

D'altra parte, fissato un iperpiano α per P, le coppie (α, A) distinte, con $A \in \alpha \cap (K - \{P\})$, sono in numero di $m - 1$, se α è m–secante K, $n - 1$ se α è n–secante K; poiché gli iperpiani per P che siano m–secanti K sono in numero di v_m e quelli n–secanti K sono in numero di v_n, si ha:

$$N_P = (m - 1)\,v_m + (n - 1)\,v_n. \tag{3.6}$$

Dalle (3.5) e (3.6) otteniamo allora:

$$(m - 1)\,v_m + (n - 1)\,v_n = (k - 1)\,\theta_{r-2}. \tag{3.7}$$

Dalle (3.4) e (3.7) si ha:

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{k\theta_{r-2} - m\theta_{r-1}}{n - m} + \dfrac{q^{r-1}}{n - m} \\[2ex] v_m = \dfrac{n\theta_{r-1} - k\theta_{r-2}}{n - m} - \dfrac{q^{r-1}}{n - m}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Sia ora Q un punto di $S_{r,q}$ — K, denotati con u_m, u_n il numero degli iperpiani per Q rispettivamente m–secanti ed n–secanti K, risulta:

$$u_m + u_n = \theta_{r-1}. \tag{3.9}$$

Sia N_A il numero di tutte le coppie (β, B), ove β è un iperpiano per Q e B è un punto di $\beta \cap K$. Contando nei due modi possibili il numero N_Q, in modo analogo a quanto fatto precedentemente per N_Q, si ha che $N_P = k\theta_{r-2} = mu_m + nu_n$, cioè:

$$mu_m + nu_n = k\theta_{r-2}. \tag{3.10}$$

Dalle (3.9), (3.10) si ha:

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{k\theta_{r-2} - m\theta_{r-1}}{n-m} \\[2ex] u_m = \dfrac{n\theta_{r-1} - k\theta_{r-2}}{n-m} \end{cases}. \tag{3.11}$$

Dalle (3.8) e (3.11) otteniamo:

$$v_n = u_n + \frac{q^{r-1}}{n-m} \quad , \quad v_m = u_m - \frac{q^{r-1}}{n-m}. \tag{3.12}$$

Dalla (3.12) si ha, tra l'altro, che $q^{r-1}/(n-m)$ deve essere un intero e quindi, essendo $q = p^h$ con p primo, che:

II. *Qualunque sia il k–insieme* K *di* $S_{r,q}$ *di tipo* $(m, n)_{r-1}$ *deve aversi*:

$$n - m = p^l, \quad \textit{con} \quad 0 \leq l \leq h(r-1). \tag{3.13}$$

Si consideri l'insieme degli iperpiani di $S_{r,q}$ n–secanti K. Essi sono in numero di t_n. Nella stella di iperpiani con centro un qualsiasi punto P di K vi sono esattamente v_n iperpiani dell'insieme suddetto, mentre nella stella d'iperpiani con centro un qualsiasi punto Q di $S_{r,q}$ — K ve ne sono esattamente u_n. Ne segue che, posto:

$$k^* = t_n \quad , \quad n^* = v_n \quad , \quad m^* = u_n \tag{3.14}$$

ed osservato che per le (3.12) risulta:

$$m^* < n^*, \tag{3.15}$$

l'insieme degli iperpiani n–secanti K costituisce nello spazio $S^*_{r,q}$ duale di $S_{r,q}$ un k^*–insieme K^* di tipo $(m^*, n^*)_{r-1}$, che sarà detto *duale* di K. Osserviamo che nell'ipotesi (2.1) (per $d = r - 1$) risulta:

$$0^* < m^* < n^* < \theta_{r-1}; \tag{3.16}$$

infatti se fosse $m^* = 0$, cioè $u_n = 0$ (cfr. (3.14)) per ogni $Q \in S_{r,q}$ — K non passerebbe nessun iperpiano n–secante K, un qualsiasi iperpiano n–secante K dovrebbe allora essere costituito da tutti punti di K, onde sarebbe $n = \theta_{r-1}$, mentre si suppone $n < \theta_{r-1}$; se fosse $n^* = \theta_{r-1}$, cioè $v_n = \theta_{r-1}$, sarebbe $v_m = 0$ (cfr. (3.4)) dunque per ogni punto P di K non passerebbero iperpiani m-secanti K, onde, se α è un iperpiano m-secante K, dovrebbe essere $\alpha \cap K = \varnothing$ quindi sarebbe $m = 0$, mentre si suppone $m > 0$. Dalle (3.16), tenuto conto delle (3.14), (3.11), (3.8), si ricava per k la disuguaglianza seguente:

$$mq + \frac{n}{\theta_{r-2}} \leq k \leq qn - \frac{(q^{r-1} - m)}{\theta_{r-2}} . \tag{3.17}$$

Sia K^{**} il duale di K^* nel biduale $S^{**}_{r,q}$ di $S_{r,q}$. Esso è costituito dagli iperpiani di $S^*_{r,q}$ che siano n^*-secanti K. Sia

$$\chi : P \in S_{r,q} \to \chi(P) \in X^{**}_{r,q} \tag{3.18}$$

l'isomorfismo canonico che – come è noto – fa corrispondere ad ogni $P \in S_{r,q}$ la stella di iperpiani di $S_{r,q}$ di centro P, $\chi(P)$, elemento di $S^{**}_{r,q}$. Per ogni $P \in K$, la stella di iperpiani con centro P contiene esattamente $v_n = n^*$ iperpiani n-secanti K, essa è in $S_{r,q}$ un iperpiano che quindi ha con K^* in comune n^* elementi, cioè è in $S^*_{r,q}$ un iperpiano n^*-secante K^*, dunque è un punto $\chi(P)$ di K^{**} in $S^{**}_{r,q}$. Viceversa un punto $\chi(P)$ di K^{**} è un iperpiano di $S^*_{r,q}$ che sia n^*-secante K^*, cioè è una stella di iperpiani con centro P di $S_{r,q}$ che contiene esattamente $n^* = v_n$ iperpiani n-secanti K, onde P deve appartenere a K (perché se $P \notin K$ per P passerebbero u_n iperpiani n-secanti K, ed è $u_n \neq v_n$ per la (3.12)). Ne segue che l'isomorfismo canonico $\chi : S_{r,q} \to S^{**}_{r,q}$ trasforma K in K^{**}; identificando $S_{r,q}$ con $S^{**}_{r,q}$ mediante χ allora K si identifica con K^{**}. Si è cosi provato che:

III. *Sia* K *un k-insieme di tipo $(m, n)_{r-1}$ di $S_{r,q}$, soddisfacente alla* (2.1). *L'insieme degli iperpiani di $S_{r,q}$ n-secanti* K *costituisce in $S_{r,q}$ un k^*-insieme K^* di tipo $(m^*, n^*)_{r-1}$, da dirsi duale di* K, *ove k^*, m^*, n^* sono dati da*:

$$k^* = (k\theta_{r-1} - m\theta_r)/(n - m) \quad , \quad m^* = (k\theta_{r-2} - m\theta_{r-1})/(n - m),$$

$$n^* = m^* + \frac{q^{r-1}}{n - m} ,$$

ed m^*, n^* soddisfano alla (3.16). *Inoltre il duale K^{**} di K^* in $S^{**}_{r,q}$ coincide con* K *a meno dell'isomorfismo canonico.*

4. I k-INSIEMI DI TIPO $(m, n)_d$ DI $S_{r,q}$, CON $d \leq r - 2$

Sia K un k-insieme di tipo $(m, n)_d$ di $S_{r,q}$ con $d \leq r - 2$, soddisfacente alla (2.1). Per la Prop. I, esso è allora a due caratteri rispetto agli S_h con $h = d + 1, d + 2, \cdots, r - 1$. Sia dunque di tipo $(M, N)_{r-1}$ rispetto agli iperpiani e di tipo $(\mu, \nu)_{r-2}$ rispetto agli S_{r-2}. Sia K^* il duale di K in $S^*_{r,q}$ (cfr. n. 3), esso è costituito dagli iperpiani N-secanti K. Una retta di $S^*_{r,q}$, cioè un fascio d'iperpiani di $S_{r,q}$, ha asse in un S_{r-2} che è o ν–secante ovvero μ–secante K. Nel primo caso gli iperpiani del fascio N–secanti K sono in numero di a_ν, nel secondo di a_μ, ove a_ν e a_μ soddisfano evidentemente le relazioni:

$$(N-\nu)\,a_\nu + (M-\nu)\,(q+1-a_\nu) = k-\nu$$

$$(N-\mu)\,a_\mu + (M-\mu)\,(q+1-a_\mu) = k-\mu$$

e quindi sono dati da:

$$a_\nu = \frac{k-M-q\,(M-\nu)}{N-M} \quad , \quad a_\mu = \frac{k-M-q\,(M-\mu)}{N-M} , \tag{4.1}$$

ed è $a_\nu > a_\mu$. Ne segue che K^* è di tipo $(a_\mu\,, a_\nu)_1$ rispetto alle rette. Si è così provato che:

IV. *Un k–insieme di tipo $(m\,, n)_d$ di $S_{r,q}$ con $d \leq r-2$ è a due caratteri rispetto agli iperpiani ed il suo duale K^* è a due caratteri rispetto alle rette.*

Per il duale K^* di K, essendo a due caratteri rispetto alle rette, può applicarsi la Prop. IV. Se ne deduce che K^* è a due caratteri rispetto agli iperpiani e che il suo duale K^{**} è a due caratteri rispetto alle rette. Ma K^{**} coincide con K a meno dell'isomorfismo canonico (cfr. Prop. III), quindi K è *a due caratteri rispetto alle rette* e sia di tipo $(m', n')_1$. Non può essere $m' = 0$, altrimenti, per la Prop. IX di [5], K coinciderebbe con il complementare di un iperpiano, ma allora sarebbe $m = 0\,, n = q^d$, mentre per la (2.1) si suppone $m > 0$. Né può aversi $m' = 1$, altrimenti, per la Prop. X di [5], dovrebbe essere necessariamente $n' = q+1$ e K sarebbe un iperpiano, ma allora si avrebbe $m = \theta_{d-1}\,, n = \theta_d$, mentre per la (2.1) si suppone $N < \theta_d$. Né può essere $n' = q+1$, ovvero $n' = q$, altrimenti $S_{r,q} - K$ sarebbe di tipo $(0\,, q+1-m')_1$ ovvero $(1\,, q+1-m')_1$ rispetto alle rette e quindi $S_{r,q} - K$ coinciderebbe rispettivamente con il complementare di un iperpiano ovvero con un iperpiano (per le Prop. IX e X di [5]) e quindi K sarebbe un iperpiano ovvero il complementare di un iperpiano, onde si avrebbe $n = \theta_d$ ovvero $m = 0$ e ciò è escluso per la (2.1). Ne segue che è $2 \leq m' < n' \leq q-1$. Da quanto precede e dalla Prop. XIV di [5] si ottiene allora che:

V. *Un k–insieme di tipo $(m\,, n)_d$ di $S_{r,q}$, con $d \leq r-2$ ed $m\,, n$ soddisfacenti alla (2.1), è di tipo $(m'\,, n')_1$ rispetto alle rette con $2 \leq m' < n' \leq q-1$. Dunque, se esiste un tale k–insieme, deve essere q un quadrato dispari; inoltre $m', n', m\,, n$ e k debbono essere dati da* ($\varepsilon = \pm 1$):

$$m' = [q+1-\sqrt{q}\,(1-\varepsilon)]/2 \quad , \quad n' = [q+1+\sqrt{q}\,(1+\varepsilon)]/2, \tag{4.2}$$

$$m = [1+\theta_{d-1}\,(q+\varepsilon\sqrt{q}) - (\sqrt{q})^d]/2 , \tag{4.3}$$

$$n = [1+\theta_{d-1}\,(q+\varepsilon\sqrt{q}) + (\sqrt{q})^d]/2 , \tag{4.4}$$

$$k = [1+\theta_{r-1}\,(q+\varepsilon\sqrt{q}) \pm (\sqrt{q})^r]/2 . \tag{4.5}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] P. DEMBOWSKI (1968) – *Finite geometries*, « Ergebnisse der Math. », Springer, Berlin.
[2] B. SEGRE (1961) – *Lectures on modern Geometry*, Cremonese, Roma.
[3] G. TALLINI (1973) – *Problemi e risultati sulle Geometrie di Galois*, Relazione n. 30, « Ist. Mat. Univ. Napoli », 1–30.
[4] G. TALLINI (1973) – *Graphic characterization of algebraic varieties in a Galois space*. Atti Convegno Teorie Combinatorie, « Acc. Naz. Lincei », 1–13.
[5] M. TALLINI SCAFATI (1972) – *Calotte di tipo* (m, n) *in uno spazio di Galois* $S_{r,q}$. « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *53*, 71–81.