
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

FILIPPO DI PASQUANTONIO, JEAN LAVOINE

**Una nuova dimostrazione della formula di
Poincaré-Bertrand, tramite la trasformata di Fourier
delle distribuzioni**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 60 (1976), n.5, p. 587–591.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_5_587_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Una nuova dimostrazione della formula di Poincaré-Bertrand, tramite la trasformata di Fourier delle distribuzioni.* Nota di FILIPPO DI PASQUANTONIO (*) e JEAN LAVOINE (**), presentata (***) dal Corrisp. A. M. ANGELINI.

SUMMARY. — We give a new proof of the Poincaré-Bertrand formula, by means of the Fourier transform of distributions in the sense of L. Schwartz.

1. INTRODUZIONE

Sia (c, c) un punto interno al rettangolo $R: [a, a'] \times [b, b']$ e Vp indichi il valore principale di un integrale nel senso di Cauchy. Come è ben noto sussiste la formula di Poincaré-Bertrand [1], [2]

$$(1) \quad Vp \int_a^{a'} \frac{dx}{x-c} Vp \int_b^{b'} dy \frac{g(x, y)}{y-x} - \\ - \int_b^{b'} dy Vp \int_a^{a'} dx \frac{g(x, y)}{(x-c)(y-x)} = -\pi^2 g(c, c)$$

purchè la funzione $g(x, y)$ sia hölderiana in R , vale a dire che esistano due costanti positive A e ν , $\nu < 1$, tali che

$$(2) \quad |g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1)| < A(|x_2 - x_1|^\nu + |y_2 - y_1|^\nu)$$

qualunque sia la coppia di punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) di R .

La formula (1) viene abitualmente dimostrata passando al campo complesso e utilizzando le formule di Plemelj (si veda, per esempio, N. I. Muskhelishvili [3], pp. 56-61). Daremo qui una nuova dimostrazione della (1), tramite la trasformata di Fourier delle distribuzioni nel senso di L. Schwartz [4].

In linea preliminare si ricorda che (cfr. [3], p. 56) l'esistenza degli integrali che figurano nella (1), nel senso del valore principale di Cauchy, è assicurata dalla condizione di Hölder [2].

Diremo che una funzione è $H(\nu)$ se essa soddisfa alla condizione (2) per una ν determinata < 1 . Inoltre si indicherà con $I(g)$ il primo membro della (1).

(*) Filippo Di Pasquantonio, ENEL-Direzione Studi e Ricerche, Centro di Ricerca Termica e Nucleare, Bastioni di Porta Volta, 10. 20121 Milano.

(**) Jean Lavoine, Département des Mathématiques, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

(***) Nella seduta dell'8 maggio 1976.

2. DIMOSTRAZIONE

Siano $\varphi(x, y)$ una funzione appartenente allo spazio $\mathcal{S}$ di Schwartz e U, V due distribuzioni temperate definite da

$$(3) \quad \langle U, \varphi \rangle = Vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-c} Vp \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\varphi(x, y)}{y-x}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \langle V, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dy Vp \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\varphi(x, y)}{(x-c)(y-x)} = \\ &= Vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y-c} Vp \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\varphi(x, y)}{x-c} - \frac{\varphi(x, y)}{x-y} \right). \end{aligned}$$

Ricordato ora che (vedere, per esempio [5])

$$(5) \quad Vp \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-2i\pi\tau t}}{t-k} = -i\pi e^{-2i\pi k\tau} \varepsilon(\tau)$$

dove

$$(6) \quad \varepsilon(\tau) = \begin{cases} -1 & \text{per } \tau < 0 \\ 1 & \text{per } \tau > 0 \end{cases}$$

possiamo calcolare, senza difficoltà, le trasformate di Fourier di U e V ottenendo:

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}(U) &= \langle U, e^{-2i\pi(\xi x + \eta y)} \rangle = -i\pi \varepsilon(\eta) Vp \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-2i\pi(\xi + \eta)x}}{x-c} = \\ &= -\pi^2 e^{-2i\pi c(\xi + \eta)} \varepsilon(\eta) \varepsilon(\xi + \eta) \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}(V) &= \langle V, e^{-2i\pi(\xi x + \eta y)} \rangle = \\ &= -i\pi \varepsilon(\xi) \left[e^{-2i\pi c} Vp \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-2i\pi\eta y}}{y-c} - Vp \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-2i\pi(\xi + \eta)y}}{y-c} \right] = \\ &= -\pi^2 e^{-2i\pi c(\xi + \eta)} [\varepsilon(\xi) \varepsilon(\eta) - \varepsilon(\xi) \varepsilon(\xi + \eta)]. \end{aligned}$$

Si sottrae ora la (8) dalla (7) e si ha

$$(9) \quad \mathcal{F}(U) - \mathcal{F}(V) = -\pi^2 e^{-2i\pi c(\xi + \eta)}$$

perché

$$\varepsilon(\xi + \eta) [\varepsilon(\xi) + \varepsilon(\eta)] - \varepsilon(\xi) \varepsilon(\eta) = 1.$$

Per inversione della trasformata di Fourier dalla (9) si ottiene

$$(10) \quad U - V = -\pi^2 \delta(x - c, y - c)$$

da cui si ha

$$(11) \quad (U - V, \varphi) = -\pi^2 \varphi(c, c).$$

Dal risultato (11) si deduce il

LEMMA 1. *Se $\psi(x, y)$ è una funzione indefinitamente derivabile il cui supporto è contenuto nel rettangolo R , e tale che il punto (c, c) sia contenuto all'interno del suo supporto, si ha*

$$(12) \quad I(\psi) = -\pi^2 \psi(c, c).$$

A questo punto, per completare la dimostrazione della (1), è necessario estendere il risultato (12) alle funzioni hölderiane nel rettangolo R .

Procediamo per passaggio al limite, dimostrando il

LEMMA 2. *Se $g(x, y)$ e $g_\alpha(x, y)$ sono $H(v)$ su R e se $g_\alpha(x, y) \rightarrow g(x, y)$ quando $\alpha \rightarrow 0$, si ha*

$$(13) \quad I(g_\alpha) \rightarrow I(g).$$

Difatti, supposto che (u, v) siano le coordinate di un punto qualsiasi di R , si può scrivere

$$g(x, y) = g(u, v) + \Omega(u, v; x, y) (|x - u|^v + |y - v|^v)$$

$$g_\alpha(x, y) = g_\alpha(u, v) + \Omega_\alpha(u, v; x, y) (|x - u|^v + |y - v|^v)$$

nelle quali $\Omega(u, v; x, y)$ e $\Omega_\alpha(u, v; x, y)$ sono maggiorate, su $R \times R$ da una costante. Inoltre $\Omega_\alpha(u, v; x, y) \rightarrow \Omega(u, v; x, y)$ quando $\alpha \rightarrow 0$.

Pertanto, prendendo $u = v = x$, si ha

$$\begin{aligned} Vp \int_a^{a'} \frac{dx}{x-c} Vp \int_b^{b'} dy \frac{g_\alpha(x, y)}{y-x} &= Vp \int_a^{a'} \frac{dx}{x-c} \left[g_\alpha(x, x) Vp \int_b^{b'} \frac{dy}{y-x} + \right. \\ &\quad \left. + \int_b^{b'} \frac{\Omega_\alpha(x, x; x, y) |y-x|^v}{y-x} dy \right] \rightarrow \\ &\rightarrow Vp \int_a^{a'} \frac{dx}{x-c} \left[g(x, x) Vp \int_b^{b'} \frac{dx}{y-x} + \int_b^{b'} \frac{\Omega(x, x; x, y) |y-x|^v}{y-x} dy \right] = \\ &= Vp \int_a^{a'} \frac{dx}{x-c} Vp \int_b^{b'} dy \frac{g(x, y)}{y-x}. \end{aligned}$$

Se si opera una trattazione analoga per l'altro integrale doppio che figura nell'espressione di $I(g_\alpha)$ si arriva a un risultato che dimostra il Lemma 2, che ha per corollario il

LEMMA 3. Se d_α è $H(v)$ sul rettangolo R e se $d_\alpha(x, y) \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$, si ha

$$I(d_\alpha) \rightarrow 0.$$

Sia ora α un numero > 0 tale che il rettangolo $R_\alpha: [a + 2\alpha, a' - 2\alpha] \times [b + 2\alpha, b' - 2\alpha]$ sia contenuto in R e contenga al suo interno il punto (c, c) . Ricordato che $g(x, y)$ è $H(v)$ su R e $g_\alpha(x, y)$ una funzione continua dappertutto, di supporto $[a + \alpha, a' - \alpha] \times [b + \alpha, b' - \alpha]$, ne consegue che g_α è $H(v)$ su R e coincidente con $g(x, y)$ su R_α . Sia inoltre $r_\alpha(x, y)$ una funzione indefinitamente derivabile, avente per supporto il cerchio di raggio α e tale che

$$\iint r_\alpha(x, y) dx dy = 1.$$

La regolarizzata (cfr. L. Schwartz [4], Capitolo I. 2) $\psi_\alpha(x, y) = g_\alpha * r_\alpha$ è indefinitamente derivabile e a supporto contenuto in R . Da queste assunzioni segue che $d_\alpha(x, y) = g_\alpha(x, y) - \psi_\alpha(x, y)$ è continua dappertutto e $H(v)$ su R . Inoltre $d_\alpha(x, y) \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$, perché

$$d_\alpha(x, y) = \iint du dv [g_\alpha(x, y) - g_\alpha(u, v)] r_\alpha(x - u, y - v).$$

Se ora si osserva che $r_\alpha(x - u, y - v)$ è diversa da zero solo nel cerchio di raggio $[|x - u|^2 + |y - v|^2]^{\frac{1}{2}} < \alpha$ e in questo cerchio si ha

$$|g_\alpha(x, y) - g_\alpha(u, v)| < B\alpha^\nu,$$

essendo B una costante, poiché

$$I(g_\alpha) = I(d_\alpha) + I(\psi_\alpha)$$

per il Lemma 1 si può scrivere

$$(14) \quad I(g_\alpha) = I(d_\alpha) - \pi^2 \psi_\alpha(c, c) = I(d_\alpha) + \pi^2 d_\alpha(c, c) - \pi^2 g(c, c)$$

perchè $g_\alpha(c, c) = g(c, c)$.

Infine, facendo tendere α a zero, per i Lemmi 2 e 3, si ha

$$(15) \quad I(g) = -\pi^2 g(c, c)$$

il che dimostra la (1).

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. POINCARÉ (1910) - *Leçons de mécanique celeste*, Tome III, *Théorie des marées*, Gauthier-Villars, p. 256.
- [2] G. BERTRAND (1921) - «Comptes-rendus Académie des Sciences», Paris, Tome 172, p. 1458.
- [3] N. I. MUSKHELISHVILI (1946) - *Singular integral equations*, Moscow, Edizione Inglese Gröningen (1953).
- [4] L. SCHWARTZ (1966) - *Théorie des distributions*, Hermann, Paris.
- [5] J. LAVOINE (1963) - *Transformation de Fourier des Pseudo-fonctions*, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris