Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Antonio Siconolfi

Sottogruppi di Sylow fissati da potenze non banali di un automorfismo senza punti fissi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.5, p. 570–572.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_5_570_0>

Teoria dei gruppi. — *Sottogruppi di Sylow fissati da potenze non banali di un automorfismo senza punti fissi.* Nota di ANTONIO SICONOLFI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Let σ be a fixed-point-free automorphism of order rs of a finite group G, where r and s are distinct primes. In the present paper a condition for the s-th power of σ to fix a unique p-Sylow subgroup of G, for every prime p dividing the order of G, is given. A similar condition for such a s-th power to fix a unique p-Sylow subgroup is also obtained for the case of a solvable group, when σ is of any order.

§ 1. Sia G un gruppo finito che ammetta un automorfismo σ senza punti fissi (a.s.p.f.), cioè tale che

$$x^{\sigma} = x \Rightarrow x = 1 .$$

È noto che σ fissa allora uno ed un solo p–sottogruppo di Sylow per ogni primo p che divida l'ordine di G. Se σ ha ordine r^2, r primo, si ha, sotto l'ulteriore ipotesi di risolubilità di G, che anche σ^r fissa uno solo ed un solo p–Sylow, per ogni p [1]. Scopo di questo lavoro è di dimostrare che se σ ha ordine rs, r e s essendo due primi distinti, allora anche $\varphi = \sigma^s$ fissa uno ed un solo p–Sylow, purchè però $\psi = \sigma^r$ agisca s.p.f. sul p–Sylow σ–invariante di G. Questa restrizione è necessaria, come si mostrerà con un esempio, e pertanto il risultato di [1] non è completamente estendibile al caso $o(\sigma) = rs$, r e s primi distinti. Si osservi inoltre che nel caso $o(\sigma) = rs$, r e s primi distinti, il gruppo G è risolubile, secondo quanto viene dimostrato in [2].

Faremo uso dei seguenti risultati, per i quali si può vedere [3], (Cap. 6 e 10) e [4].

(*a*) σ fissa uno ed un solo p–Sylow per ogni primo p che divide l'ordine di G;

(*b*) se N è un sottogruppo normale σ–invariante di G, $\bar{\sigma}$ agisce s.p.f. su G/N;

(*c*) se H è un sottogruppo σ–invariante di G, $N_G(H)$ e $C_G(H)$ sono anch'essi σ–invarianti;

(*d*) sia $G = KN$, $N \trianglelefteq G$, $(|K|, |N|) = 1$. Se tutte le potenze non banali di σ agiscono s.p.f. su K, allora $G = K \times N$, [4];

(*e*) (Thompson): se σ ha ordine primo, G è nilpotente.

Se $H \leq G$, $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$, con H_α denoteremo il sottogruppo di H formato dagli elementi di H fissati da α: $H_\alpha = \{h \in H \mid h^\alpha = h\}$.

(*) Nella seduta dell'8 maggio 1976.

§ 2. TEOREMA. *Sia* G *un gruppo finito che ammetta un automorfismo s.p.f. di ordine re, r e s primi distinti. Siano* $\varphi = \sigma^s$, $\psi = \sigma^r$. *Se* ψ *è s.p.f. sul p–Sylow σ–invariante* S, *allora* φ *fissa uno ed un solo p–Sylow di* G.

Dimostrazione. G è risolubile per [2], e per ipotesi $S_\psi = \{1\}$. Se $K = O_p(G) \neq \{1\}$, la tesi si ottiene per induzione, in quanto ψ è s.p.f. su S/K, in virtù di (*b*), oppure applicando (*e*), a seconda dell'ordine di σ su G/K.

Sia allora $K = \{1\}$, e sia N un sottogruppo minimale normale e σ–invariante. Poichè G è risolubile, N esiste ed è abeliano elementare, e cioè ha tutti gli elementi di ordine q, dove q è un primo (diverso da p, per l'ipotesi $K = \{1\}$). Ancora per induzione o per (*e*) su G/N, arriviamo al caso in cui tutti i p–Sylow φ–invarianti di G sono contenuti in SN. Se $SN \neq G$, si ha la tesi, sempre per induzione o per (*e*).

Possiamo allora supporre $G = SN$.

Dimostriamo intanto che $H = N_G(S) = S$. Se infatti $H \supset S$, il sottogruppo $H \cap N$, essendo normalizzato sia da N (che è abeliano) che da S (in quanto $H \cap N \trianglelefteq H$), sarebbe normale in G; si tratta inoltre di un sottogruppo σ–invariante, come intersezione di sottogruppi σ–invarianti ($N_G(S)$ è σ–invariante per (*c*)). Essendo contenuto in N, deve allora coincidere con N, per via della minimalità di N. Allora S e N sono contenuti in H, e dunque $S \triangleleft G$ contro l'ipotesi $O_p(G) = \{1\}$.

Inoltre, φ non ha punti fissi su N. Sia infatti $N_\varphi \neq \{1\}$, e sia P un sottogruppo caratteristico di S con $P \neq S$. Per induzione, o per (*e*), P è l'unico p–Sylow di PN fissato da φ, e dunque N_φ lo normalizza. Si ha infatti, se $x \in N$:

$$(P^x)^\varphi = P^x\,;$$

e dunque, per l'unicità, $P^x = P$, cioè x normalizza P. Procedendo come sopra, con P in luogo di S, e usando ancora la minimalità di N, si arriva alla normalità di P in G, e dunque a $P = \{1\}$. Allora S è privo di sottogruppi caratteristici, ed è pertanto abeliano (elementare). Se $S_\varphi = \{1\}$, avendosi anche per ipotesi $S_\varphi = \{1\}$, si ha, per (*d*), che S è normale in G, il che è escluso. Sia allora $S_\varphi \neq 1$. Per (*e*), G_φ è nilpotente, in quanto σ ha su di esso ordine r, e dunque $G_\varphi = S_\varphi \times N_\varphi$. Allora N_φ normalizza S, e così pure S (che è abeliano); dunque $N_G(S_\varphi) \supset S$, e come sopra si conclude $S_\varphi \triangleleft G$, escluso. Ciò dimostra che $N_\varphi = \{1\}$.

Sia ora S_1 un p–sottogruppo di Sylow σ–invariante di G. Si ha allora $S_1 = S^x$, con $x \in N$, e inoltre:

$$S^x = S_1 = S_1^\varphi = (S^x)^\varphi = S^{x\varphi}$$

da cui $x^\varphi x^{-1} \in N_G(S) = S$. Allora $x^\varphi x^{-1} \in S \cap N = \{1\}$, e dunque $x^\varphi = x$. Ma essendo $N_\varphi = \{1\}$, è $x = 1$, ovvero $S_1 = S$, cioè la tesi.

Sotto l'ulteriore ipotesi di risolubilità (per o (σ) qualsiasi non è infatti noto se G sia risolubile) si può ottenere il seguente e più generale risultato che comprende quello dimostrato in [1].

TEOREMA. *Sia* σ *un a.s.p.f. di* G *gruppo risolubile; sia* $\varphi = \sigma^r$ *una potenza di* σ *con esponente* r *primo. Se su* S, *p–Sylow* σ*–invariante, tutte le potenze (non banali) di* σ *distinte da* φ *agiscono senza punti fissi, allora* φ *fissa uno ed un solo p–Sylow.*

§ 3. Diamo ora l'esempio annunciato nel § 1, dimostrante come l'ipotesi $S_\psi = \{1\}$ sia necessaria. Le matrici due per due sul GF (11) agiscono sul gruppo $Z_{11} \times Z_{11}$ (che scriviamo additivamente). Il gruppo Z_3, generato dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

agisce allora su $Z_{11} \times Z_{11}$, in modo naturale, e per questa azione possiamo considerare il prodotto semidiretto:

$$G = Z_3 \cdot (Z_{11} \times Z_{11}).$$

Sia $\sigma = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, sul GF (11). Nel gruppo delle matrici sul GF(11), σ normalizza Z_3. Allora σ agisce per coniugio su Z_3 e in modo naturale su $Z_{11} \times Z_{11}$; dunque σ agisce su G, e la sua azione è un automorfismo senza punti fissi. Si ha:

$$o(\sigma) = 10 = 2 \cdot 5\,,$$

$$\sigma^2 = \psi = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^5 = \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$G_\psi = Z_3 \quad , \quad \{1\} \neq G_\varphi \subset Z_{11} \times Z_{11}\,.$$

L'automorfismo φ fissa allora tutti i 3–Sylow del tipo $(Z_3)^x$, con $x \in G_\varphi \subset Z_{11} \times Z_{11}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. MACHÌ (1972) – *Automorfismi che fissano sottogruppi di Sylow*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », Ser. VIII, *52*, 835–839.

[2] E. WALL RALSTON (1972) – *Solvability of finite groups admitting a Fixed–Point–Free automorphisms of order rs*, « J. of Algebra », *23*, 164–180.

[3] D. GORENSTEIN (1968) – *Finite Groups*, Harper and Row.

[4] B. SCIMEMI (1968) – *Finite Groups Admitting a Fixed–Point–Free Automorphism*, « J. of Algebra », *10*, 125–133.