Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alessandro Scarselli

Sui gruppi a sottogruppi supersolubili abeliani

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.5, p. 564–569.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_5_564_0>

Algebra. — *Sui gruppi a sottogruppi supersolubili abeliani* (*).

Nota di ALESSANDRO SCARSELLI, presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — Groups without non abelian supersoluble subgroups are studied.

In questa Nota viene svolto un primo studio sui gruppi risolubili finiti i cui sottogruppi supersolubili sono abeliani (SA–gruppi). Tale classe di gruppi è inclusa nella classe degli A–gruppi, gruppi risolubili caratterizzati dalla proprieta che ogni sottogruppo nilpotente è abeliano, e la cui teoria si è sviluppata principalmente ad opera di Taunt e, più recentemente di Carter e di Huppert.

Si riconduce lo studio di un SA–gruppo a quello dei suoi sottogruppi di Hall relativi a due primi distinti (Lemma 6), studio facilitato dal fatto che tali sottogruppi sono metabeliani. Si mostra che gli SA–gruppi costituiscono una formazione (Teoremi 11 e 13) e, come conseguenza, si ottiene che un SA–gruppo ha un 2–sottogruppo di Sylow normale (Corollario 17).

Si nota, infine che un gruppo finito a sottogruppi super-solubili abel ani è necessariamente risolubile.

Nel corso della Nota, con gruppo, intendiamo sempre un gruppo finito.

DEFINIZIONE 1. *Un* SA*–gruppo è un gruppo risolubile i cui sottogruppi supersolubili sono abeliani.*

Dalla definizione discende immediatamente il

LEMMA 2. *Ogni sottogruppo di un* SA*–gruppo è un* SA*–gruppo.*

LEMMA 3. *Sia* G *un gruppo, allora* G *è un* SA*–gruppo se e solo se*:

(1) G *è un* A*–gruppo.*

(2) *Per ogni sottogruppo* X *di* G, *di ordine primo, il normalizzante* $N_G(X)$ *di* X *in* G *coincide con il centralizzante* $C_G(X)$ *di* X *in* G.

Dimostrazione. Chiaramente se G è un SA–gruppo allora è un A–gruppo, cioè soddisfa (1); se poi X è un sottogruppo di ordine primo di G e $y \in N_G(X)$, allora $\langle y \rangle X$ è un sottogruppo supersolubile di G e quindi abeliano, ovvero $y \in C_G(X)$ e quindi $N_G(X) = C_G(X)$ cioè G soddisfa (2).

Viceversa sia G un gruppo che soddisfa (1) e (2). Supponiamo per assurdo che G non sia un SA–gruppo; allora G conterrà un sottogruppo H tale che:

(*a*) H è supersolubile;

(*b*) H non è abeliano;

(*c*) Se $K \subsetneq H$, allora K è abeliano.

(*) Eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(**) Nella seduta dell'8 maggio 1976.

In definitiva H è un gruppo non abeliano minimale (cfr. [3], [4] o [1], Cap. III, § 5) e quindi il derivato H' di H è un sottogruppo normale minimale di H. H' ha quindi ordine primo p, essendo H supersolubile. H non può essere un p-gruppo, giacchè non è abeliano e G soddisfa (1) e quindi H' è un p-sottogruppo di Sylow di H. Da ciò segue $N_H(H') \neq C_H(H')$ e quindi $N_G(H') \neq C_G(H')$, una contraddizione dal momento che H' ha ordine primo e G soddisfa (2).

TEOREMA 4. *Sia* G *un* A-*gruppo, allora le seguenti condizioni sono equivalenti*:

(i) *Per ogni sottogruppo ciclico* X *di* G *è* $N_G(X) = C_G(X)$;

(ii) *Per ogni sottogruppo ciclico* X *di* G, *di ordine potenza di un primo è* $N_G(X) = C_G(X)$;

(iii) *Per ogni sottogruppo* X *di* G *di ordine primo è* $N_G(X) = C_G(X)$;

(iv) G *è un* SA-*gruppo*.

Dimostrazione. Chiaramente (i) $\rightarrow$ (ii) $\rightarrow$ (iii) e (iii) $\rightarrow$ (iv) per il Lemma 3. Sia dunque G un SA-gruppo, X un sottogruppo ciclico di G e $y \in N_G(X)$, allora $\langle y \rangle X$ è supersolubile e quindi abeliano, ovvero $y \in C_G(X)$ e quindi $N_G(X) = C_G(X)$ onde (iv) $\rightarrow$ (i).

LEMMA 5. *Sia* G *un* A-*gruppo e* H *un sottogruppo di* G *contenuto nel centro* Z (G) *di* G, *allora* G *è un* SA-*gruppo se e solo se* G/H *è un* SA-*gruppo*.

Dimostrazione. Se G è un SA-gruppo e K/H è un sottogruppo supersosolubile di G/H allora, essendo $H \subseteq Z(G)$, anche K è supersolubile e quindi abeliano, onde K/H è abeliano, ovvero G/H è un SA-gruppo.

Viceversa sia G/H un SA-gruppo e K un sottogruppo supersolubile di G, allora HK/H è supersolubile e quindi abeliano, ma è noto che in un A-gruppo G è $G' \cap Z(G) = 1$ (cfr. [5]) e quindi $K' \subseteq H \cap G' \subseteq Z(G) \cap G' = 1$, ovvero K è abeliano e perciò G è un SA-gruppo.

LEMMA 6. *Sia* G *un gruppo risolubile, allora* G *è un* SA-*gruppo se e solo se ogni sottogruppo di Hall di* G, *relativo a due primi distinti è un* SA-*gruppo*.

Dimostrazione. Se G è un SA-gruppo, allora ogni suo sottogruppo è un SA-gruppo e quindi, in particolare lo sono i sottogruppi di Hall di G relativi a due primi distinti.

Viceversa sia G un gruppo risolubile tale che i suoi sottogruppi di Hall relativi a due primi distinti siano SA-gruppi. Allora, chiaramente G è un A-gruppo. Sia X un sottogruppo di ordine primo di G e P un sottogruppo di Sylow di $N_G(X)$, allora P è permutabile con un sottogruppo di Sylow Q di $N_G(X)$ contenente X. PQ è contenuto in un sottogruppo di Hall H di G, relativo a due primi distinti e quindi $N_H(X) = C_H(X)$. Poichè $P \subseteq N_H(X)$ si ha $P \subseteq C_H(X) \subseteq C_G(X)$. Perciò ogni sottogruppo di Sylow di $N_G(X)$ centralizza X e quindi $N_G(X) = C_G(X)$. In base al Lemma 3, G è un SA-gruppo.

LEMMA 7. *Sia* G *un gruppo*, G′ *il suo derivato*, U *un sottogruppo normale minimale di* G, *contenuto in* G′ *e sia* $U = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r$ *con* V_1 *normale minimale in* G′ *e i* V_i *coniugati a* V_1 *in* G $(i = 1, \cdots, r)$, *allora* $N_G(V_i) = N_G(V_1)$ $(i = 1, \cdots, r)$.

Dimostrazione. Essendo V_i coniugato a V_1 in G, anche $N_G(V_i)$ è coniugato a $N_G(V_1)$ in G, ma $N_G(V_1) \supseteq G'$ e quindi $N_G(V_1)$ è normale in G, onde $N_G(V_i) = N_G(V_1)$ $(i = 1, \cdots, r)$.

LEMMA 8. *Sia* G *un* SA–*gruppo d'ordine* $p^a q^b$ *con* p *e* q *primi distinti*, U *un sottogruppo normale minimale di* G *e* $U = V_1 \times W$ *con* V_1 *di ordine* p, *allora* $N_G(V_1) = C_G(V_1) = C_G(U)$.

Dimostrazione. Essendo G un A–gruppo e U normale in G e abeliano è $U = (U \cap G') \times (U \cap Z(G))$ (cfr. [5]), ed essendo U normale minimale, allora $U \subseteq Z(G)$, oppure $U \subseteq G'$. Se $U \subseteq Z(G)$ il risultato è ovvio. Sia dunque $U \subseteq G'$. Essendo G prodotto di due gruppi abeliani, allora G′ è abeliano (cfr. [2] o [6], XV.9.1) e quindi V_1 è un sottogruppo normale minimale di G′. Sarà allora $U = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r$ con V_i coniugato a V_1 in G $(i = 1, \cdots, r)$.

Per il Lemma 7 è $N_G(V_i) = N_G(V_1)$ $(i = 1, \cdots, r)$ e, poichè G è un SA–gruppo e V_i ha ordine primo è $N_G(V_i) = C_G(V_i)$ $(i = 1, \cdots, r)$, quindi $C_G(U) = \bigcap_{i=1}^{r} C_G(V_i) = \bigcap_{i=1}^{r} N_G(V_i) = N_G(V_1) = C_G(V_1)$.

TEOREMA 9. *Sia* G *un* SA–*gruppo d'ordine* $p^a q^b$ *con* p *e* q *primi distinti e* U *un suo sottogruppo normale minimale, allora* G *induce in* U *un gruppo regolare di automorfismi, in particolare se* p *divide l'ordine di* U, *allora* $G/C_G(U)$ *è un* q–*gruppo ciclico*.

Dimostrazione. Sia $x \in G$ e sia $y \neq 1$ un elemento di U centralizzato da x. Posto $\langle y \rangle = V_1$, sarà $U = V_1 \times W$ per un opportuno sottogruppo W di U. Per il Lemma 8 è $C_G(U) = C_G(V_1)$ e quindi $x \in C_G(U)$.

LEMMA 10. *Sia* G *un* SA–*gruppo d'ordine* $p^a q^b$ *con* p *e* q *primi distinti e sia* U *un sottogruppo normale di* G, *allora* G/U *è un* SA–*gruppo*.

Dimostrazione. Sia $\pi = \{p, q\}$ e sia $\mathscr{A}$ la classe dei π–gruppi G tali che:

(*a*) G è un SA–gruppo;

(*b*) Esiste un sottogruppo normale di G tale che il relativo gruppo quoziente non è un SA–gruppo.

Sia $\mathscr{A} \neq \emptyset$ e G un gruppo d'ordine minimo in $\mathscr{A}$; allora

(1) *esiste un sottogruppo normale minimale* U *di* G, *tale che* G/U *non è un* SA–*gruppo*.

Poichè $G \in \mathscr{A}$ esisterà un sottogruppo normale N, tale che G/N non è un SA–gruppo. Sia U un sottogruppo normale minimale di G contenuto in N e supponiamo che G/U sia un SA–gruppo.

Poichè G/U ha ordine minore di G, allora $G/U \notin \mathscr{A}$ e quindi $G/U \diagup N/U$ è un SA–gruppo. Ma $G/U \diagup N/U \simeq G/N$, una contraddizione.

(2) *Se* X/U *è un sottogruppo di ordine primo di* G/U *tale che* $N_{G/U}(X/U) \neq \neq C_{G/U}(X/U)$, *allora* X *è un sottogruppo normale di* G.

Abbiamo infatti $N_{G/U}(X/U) = N_G(X)/U$. Se $N_G(X) \neq G$, allora $N_G(X) \notin \mathcal{A}$, ovvero $N_G(X)/U$ è un SA–gruppo. Poichè X/U è un sottogruppo di ordine primo di $N_G(X)/U$, si avrà allora $N_G(X)/U = N_{G/U}(X/U) = = C_{G/U}(X/U)$, una contraddizione.

(3) $X \subseteq G'$; *quindi* X *è abeliano e* $X \cap Z(G) = 1$.

Abbiamo intanto $U \subseteq G'$; in caso contrario, essendo G un A–gruppo è $U \subseteq Z(G)$, ed essendo G un SA–gruppo anche G/U lo sarebbe in base al Lemma 5. Sia $[X:U] = r$ ($r = p$ o q) e $X = \langle x \rangle U$.

Poichè $X/U \nsubseteq Z(G/U)$, esisterà un elemento $y \in G$ con $y^{-1}xy = x^i u$ con $1 < i < r$ e $u \in U$.

Avremo allora che $x^{-1}y^{-1}xy = x^{i-1}u \in G'$ e quindi $x^{i-1} \in G'$. Date le limitazioni per i, si conclude che $x \in G'$ e quindi $X \subseteq G'$.

(4) *Se* p *divide l'ordine di* U, *allora* X *è un* p*–gruppo.*

In caso contrario è $[X:U] = q$. Poichè X è abeliano, sarà $X = Y \times U$ con Y di ordine q. Allora Y è un sottogruppo caratteristico di X e quindi Y è un sottogruppo normale di G. Poichè Y ha ordine primo, in base al Lemma 3 è $Y \subseteq Z(G) \cap X = 1$, una contraddizione.

(5) X *è un* p*–gruppo abeliano elementare.*

In caso contrario esiste un $x \in X$ con $x^{p^2} = 1 \neq x^p$. Sarà $X = \langle x \rangle \times U_1$ con $U_1 \subseteq U$. Il sottogruppo di Frattini $\Phi(X)$ di X è un sottogruppo caratteristico di X e quindi un sottogruppo normale di G; ma $\Phi(X) = \langle x^p \rangle$ ha ordine p e quindi $\Phi(X) \subseteq Z(G) \cap X = 1$, una contraddizione.

Sia infine Q un q–sottogruppo di Sylow di G. Allora $Q/C_Q(X)$ è isomorfo a un q–gruppo Γ di automorfismi di X. Essendo X un p–gruppo abeliano elementare, allora U è un fattore diretto di X Γ–invariante; perciò U ha un complemento Y in X che è Γ–invariante. Cioè $X = Y \times U$ con Y Γ–invariante; ma allora $Q \subseteq N_G(Y)$. Poichè Y ha ordine primo e G è un SA–gruppo è $Q \subseteq C_G(Y)$; poichè i p–sottogruppi di Sylow di G sono abeliani si conclude. che $G \subseteq C_G(Y)$, ovvero ancora $Y \subseteq X \cap Z(G) = 1$, una contraddizione Tale contraddizione mostra che $\mathcal{A} = \emptyset$.

TEOREMA 11. *Sia* G *un* SA*–gruppo e* N *un sottogruppo normale di* G *allora* G/N *è un* SA*–gruppo.*

Dimostrazione. Siano p e q primi distinti e $\pi = \{p, q\}$. Sia H/N un π–sottogruppo di Hall di G/N, allora esiste un π–sottogruppo di Hall R di G con $H/N = RN/N \simeq R/R \cap N$.

Essendo R un SA–gruppo e $R \cap N$ un suo sottogruppo normale, allora $R/R \cap N$ è un SA–gruppo, in base al Lemma 10 e quindi H/N è un SA–gruppo. Quindi ogni sottogruppo di Hall di G/N relativo a due primi distinti è un SA–gruppo e quindi, in base al Lemma 6, G/N è un SA–gruppo.

LEMMA 12. *Sia* G *un gruppo d'ordine* $p^a q^b$ *con* p *e* q *primi distinti e* $U \neq V$ *sottogruppi normali minimali di* G, *tali che* G/U *e* G/V *siano* SA–*gruppi*; *allora* G *è un* SA–*gruppo*.

Dimostrazione. Chiaramente G è un A–gruppo e quindi se U o V è centrale, G è un SA–gruppo in base al Lemma 5. Siano quindi $U \subseteq G'$ e $V \subseteq G'$. Sia X un sottogruppo d'ordine primo di G, allora $X \cap U = 1$ oppure $X \cap U = 1$; sia $X \cap U = 1$. XU/U è un sottogruppo di ordine primo di G/U e quindi $N_{G/U}(XU/U) = C_{G/U}(XU/U)$. Sia $\langle x \rangle = X$ e X di ordine r ($r = p$ o q); sia $y \in N_G(X)$ e $y \notin C_G(X)$, allora esisterà un $1 < i < r$ con $y^{-1}xy = x^i$, quindi $x^{-1}y^{-1}xy = x^{i-1} \in G'$ e perciò $x \in G'$ date le limitazioni per i. Essendo $U \subseteq G'$ e $X \subseteq G'$ è $XU \subseteq G'$. Poichè G' è abeliano e $X \cap U = 1$ è $XU = X \times U$. Essendo $y \in N_G(X)$ è $yU \in N_{G/U}(XU/U) = C_{G/U}(XU/U)$ e perciò $y^{-1}xy = xu$ con $u \in U$; ma $y^{-1}xy = x^i$ e quindi $x^i = x$ e $u = 1$, una contraddizione.

TEOREMA 13. *Sia* G *un gruppo*, N_1 *ed* N_2 *sottogruppi normali di* G *con* G/N_1 *e* G/N_2 SA–*gruppi*; *allora* $G/N_1 \cap N_2$ *è un* SA–*gruppo*.

Dimostrazione. Sia G un minimo controesempio e $M = N_1 \cap N_2$, allora $G/M/N_1/M \simeq G/N_1$ e $G/M/N_2/M \simeq G/N_2$ sono SA–gruppi; poichè G è un minimo controesempio e G/M non è un SA–gruppo, deve essere $M = 1$; in particolare G è risolubile. Sia U normale minimale in G e contenuto in N_1; allora $G/U/N_1/U \simeq G/N_1$ è un SA–gruppo e $G/U/N_2U/U \simeq G/N_2U \simeq$ $\simeq G/N_2/N_2U/N_2$ è un SA–gruppo in base al Teorema 11. Poichè G è un minimo controesempio allora G/U è un SA/gruppo; analogamente se V è normale minimale in G ed è contenuto in N_2, G/V è un SA–gruppo. Siano dunque p, q primi distinti, $\pi = \{p, q\}$ e H un π–sottogruppo di Hall di G; allora HU/U e HV/V sono SA–gruppi, quindi $H/H \cap U$ e $H/H \cap V$ sono SA–gruppi. Se $H \neq G$, essendo G un minimo controesempio, $H/(H \cap U \cap V) \simeq H$ è un SA–gruppo. Se dunque l'ordine di G ha almeno tre divisori primi distinti, ogni sottogruppo di Hall di G, relativo a due primi distinti è un SA–gruppo e quindi, in base al Lemma 6, G stesso lo è, una contraddizione. Perciò l'ordine di G ha solo due divisori primi distinti, il che contraddice il Lemma 12.

COROLLARIO 14. *La classe degli* SA–*gruppi è una formazione*.

LEMMA 15. *Se* G *è un gruppo a sottogruppi supersolubili abeliani e* x *e* y *sono involuzioni di* G, *allora* x *e* y *sono permutabili*.

Dimostrazione. Sia $w = xy$, allora $x^{-1}wx = yx = w^{-1}$, ma $\langle w, x \rangle$ è supersolubile e quindi abeliano, onde $w^{-1} = w$ e quindi $xy = yx$.

COROLLARIO 16. *Sia* G *un gruppo a sottogruppi supersolubili abeliani, allora l'insieme costituito dalle involuzioni di* G *e dall'unità, è un* 2–*sottogruppo normale di* G.

COROLLARIO 17. *Se* G *è un* SA–*gruppo, allora* G *ha un* 2–*sottogruppo di Sylow normale*.

Dimostrazione. Sia $O_2(G)$ l'unione dei 2–sottogruppi normali di G, allora $G/O_2(G)$ è un SA–gruppo, in base al Teorema 11 e non ha 2–sottogruppi normali non banali, perciò $G/O_2(G)$ ha ordine dispari, in base al Corollario 16.

OSSERVAZIONE. Nella definizione di SA–gruppo abbiamo richiesto la risolubilità. Tale restrizione è in effetti superflua, in quanto come corollario del Teorema 11 e del Corollario 16, si può verificare che un gruppo a sottogruppi supersolubili abeliani è necessariamente risolubile; il Lemma 15 e quindi il Corollario 16 non dipendono infatti dalla risolubilità del gruppo. Sia G un gruppo d'ordine minimo rispetto alle condizioni:

(*a*) G non è risolubile;

(*b*) Ogni sottogruppo supersolubile di G è abeliano e sia N un sottogruppo normale di G con $N \neq G$, allora N è risolubile per la minimalità di G. Se H/N è un sottogruppo supersolubile di G/N, allora H è risolubile e quindi H/N è abeliano in base al Teorema 11. Quindi se $N \neq 1$, G/N è risolubile per la minimalità di G. Essendo N e G/N risolubili anche G lo è. Si conclude che G è semplice non abeliano, il che contraddice il Corollario 16.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. HUPPERT (1967) – *Endliche Gruppen*, I, Springer-Verlag, Berlin-New York.

[2] N. ITO (1955) – *Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen*, «Math. Zeit.», *62*, 400–401.

[3] G. A. MILLER e H. MORENO (1903) – *Non abelian groups in which every subgroup is abelian*, «Trans. Am. Math. Soc.», *4*, 398–404.

[4] L. REDEI (1956) – *Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen*, «Publ. Math. Debrecen», *4*, 303–324.

[5] D. TAUNT (1949) – *On A-groups*, Proc. Cambridge «Phil. Soc.», *45*, 14–42.

[6] G. ZAPPA (1970) – *Fondamenti di teoria dei gruppi*, II, Cremonese, Roma.