Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Vladimiro Valerio

Sulle inverse generalizzate e sulla risoluzione di particolari sistemi di equazioni lineari, con applicazione al calcolo delle strutture reticolari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.2, p. 84–89.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_2_84_0>

Algebra. — *Sulle inverse generalizzate e sulla risoluzione di particolari sistemi di equazioni lineari, con applicazione al calcolo delle strutture reticolari.* Nota di VLADIMIRO VALERIO, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — For two simultaneous linear matrix equations $AX = T$, $A^* Y + QX = Z$ conditions of consistency and uniqueness of solutions are given. A particular Bjerhammar's generalized inverse of A is used for that; such an inverse minimizes a given norm, called Q-norm, in a vectori space. The results are then used to solve problems concerning reticulated structures.

1\. È ben noto che una matrice A (di tipo $n \times n$), definita sul campo dei numeri complessi, ammette se $\det A \neq 0$ una ed una sola inversa (inversa di Cayley) denotata con A^{-1} tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n, \tag{1}$$

dove I_n è la matrice unità di ordine n.

Indipendentemente dai lavori di E. H. Moore, che introdusse per la prima volta nel 1920 [1] il concetto di inversa generalizzata, A. Bjerhammar nel 1951 [2] e R. Penrose nel 1955 [3] hanno esteso il concetto di inversa alle matrici rettangolari di rango massimo ed alle matrici singolari o senza inversa di Cayley, matrici il cui rango non è massimo. In tali casi per ogni A (di tipo $m \times n$) la (1) non è verificata, ma sussiste una sola delle seguenti coppie di relazioni

se $m > n$:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= I_n \\ A^{-1}A &= A_m^0, \end{aligned} \tag{2}$$

se $m < n$:

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= I_m \\ AA^{-1} &= A_n^0, \end{aligned} \tag{2'}$$

dove A^0 è detta matrice unità singolare e $\det A^0 = 0$. Tra le infinite inverse soddisfacenti le (2), inversa destra di A, o le (2'), inversa sinistra di A, Penrose [3, p. 406] ha definito una unica inversa per ogni A (di

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1976.

tipo $m \times n$), detta in seguito [1] « pseudoinversa », determinata dalle quattro equazioni

$$(3') \qquad AXA = A$$

$$(3'') \qquad XAX = X$$

$$(3''') \qquad (AX)^* = AX$$

$$(3'''') \qquad (XA)^* = XA\,,$$

dove X rappresenta la pseudoinversa di A e A^* designa la trasposta complessa coniugata di A.

Un notevole interesse applicativo hanno le inverse generalizzate – notazione A_g – determinate dalle (2), o (2'), e soddisfacenti la sola condizione (3'). Tali inverse ed alcune loro varietà sono state studiate da C. R. Rao [7], [8] e da Bjerhammar [9; con ampia bibliografia fino al 1973].

2. Sia A_g una inversa generalizzata di A; allora $X = A_g T$ è una soluzione del sistema $AX = T$, per ogni T che lo renda compatibile [8; p. 20].

In merito alle inverse generalizzate sussiste il seguente

LEMMA 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* $AX = T$ *sia compatibile è che esista* A_g *e che* $AA_g T = T$ [8; p. 24].

3. Consideriamo il sistema

$$(4) \qquad \begin{cases} AX = T \\ A^* Y + QX = Z\,, \end{cases}$$

definito sul campo dei numeri complessi. Fissate le dimensioni di A e di X quelle delle matrici Q , T , Y , Z risultano univocamente determinate; in particolare la matrice Q risulta quadrata.

Sussistono i seguenti due teoremi.

TEOREMA 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema* (4) *sia compatibile è che risulti compatibile l'equazione* $AX = T$.

Dimostrazione. Se $AX = T$ è compatibile, esiste per il Lemma 1 una A_g per la quale

$$(5) \qquad X = A_g T$$

è una soluzione; se esiste A_g esiste $(A^*)_g$ e risulta

$$(A^*)_g = (A_g)^*\,;$$

(1) T. N. E. Greville [4], [5] ha definito in altra maniera tale inversa e, per la sua affinità con l'inversa ordinaria di Cayley, la ha denominata pseudoinversa. Per altre definizioni si veda [6].

quindi, per la seconda delle (4)

$$Y = -(A^*)_g QA_g T + (A^*)_g Z . \tag{6}$$

Le (5) e (6) risultano essere soluzioni del sistema (4).

La condizione di sufficienza risulta ovvia.

TEOREMA 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema* (4) *ammetta soluzione unica è che sia compatibile* $AX = T$ *e che le matrici* A *e* Q *siano di rango massimo.*

Dimostrazione. Sia X_0 una soluzione del sistema $AX = T$; per la seconda delle (4) risulta

$$X_0 = Q^{-1} Z - Q^{-1} A^* Y \tag{7}$$

questa soluzione risultando unica *se* è unica la matrice Q^{-1}; essendo Q quadrata, Q^{-1} è unica se e solo se $\det Q \neq 0$. Sostituendo la (7) nella prima delle (4) otteniamo

$$AQ^{-1} Z - AQ^{-1} A^* Y = T ,$$

da cui

$$Y = (AQ^{-1} A^*)^{-1} (AQ^{-1} Z - T) ; \tag{8}$$

questa soluzione è unica *se e solo se* è unica $(AQ^{-1} A^*)^{-1}$; la matrice quadrata $(AQ^{-1} A^*)$ ammette inversa di Cayley se esiste Q^{-1} e se $\det (AA^*) \neq 0$, cioè rango $(A) = \max$, essendo rango $(A) =$ rango (AA^*).

Dalla (8) segue la condizione di sufficienza della (7).

4. In merito alle soluzioni dei sistemi lineari compatibili, sussiste il seguente

LEMMA 2. *Dato il sistema compatibile* $AX = T$ *l'insieme completo delle soluzioni è dato da* [2], [8], [9]

$$X = A^{-1} T + (I - A^{-1} A) Z , \tag{9}$$

dove A^{-1} *è una qualunque inversa soddisfacente la* (3'); Z *è una matrice arbitraria di dimensioni opportune.*

La (9) è composta dalla somma della soluzione del sistema $AX = T$ e dalla soluzione particolare $X = (I - A^{-1} A) Z$ del sistema omogeneo associato.

Le soluzioni del sistema (4) sotto le condizioni del Teorema 2 sono

$$\boxed{X = A_{Q0}^{-1} T + (I - A_{Q0}^{-1} A) Q^{-1} Z} \tag{9'}$$

$$\boxed{Y = H_{Q0}^{-1} AQ^{-1} Z - H_{Q0}^{-1} T} \tag{9''}$$

dove $A_{Q0}^{-1} = Q^{-1} A^* (AQ^{-1} A^*)^{-1}$ è la Q–inversa definita da Bjerhammar [9, p. 16] unica per $\det(AA^*) \neq 0$; $H_{Q0} = (AQ^{-1} A^*)$ risulta non singolare per rango (A) = max e rango (Q) = max.

5. I Lemma e i Teoremi valgono anche per X e Y matrici vettori.

6. Sono state altrove [10], [11], [12], [13] [14] studiate le proprietà di operatori lineari tra spazi di Hilbert. Sarà oggetto di una futura indagine lo studio dell'operatore A definito nel sistema (4).

In merito a tale sistema si vuole ora rilevare la seguente proprietà dell'operatore A_{Q0}^{-1}.

Sia A un operatore lineare $A : \mathscr{S} \to \tau$ con $\mathscr{S}$ e τ spazi vettoriali normati; sia stabilita in $\mathscr{S}$ una norma che denotiamo con $\| x \|$ e che definiamo $\mathscr{Q}$–norma

$$\| x \| = (x^* Qx)^{\frac{1}{2}} , \qquad \forall x \in \mathscr{S} \tag{10}$$

con Q definito positivo (d.p.).

Se esiste $A^{-1} : \tau \to \mathscr{S}$, l'operatore che minimizza la $\mathscr{Q}$–norma è

$$\min_{Ax=t} \| x \| = A_{Q0}^{-1} t , \qquad t \in \tau \tag{11}$$

Per Q = I si definisce in $\mathscr{S}$ una $\mathscr{I}$–norma

$$\| x \| = (x^* x)^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

e

$$\min_{Ax=t} \| x \| = A_{I_0}^{-1} t . \tag{13}$$

7. Data una struttura reticolare spaziale ed un riferimento cartesiano, le condizioni di « equilibrio delle forze » e di « compatibilità degli spostamenti » della struttura risultano espresse da un sistema del tipo (4) definito sul campo dei numeri reali e nel quale le matrici X e Y risultano essere vettore colonna x e vettore colonna y

$$\begin{cases} Ax = t \\ A^* y + Qx = z . \end{cases} \tag{14}$$

Nel sistema (14) la matrice A è formata dai coseni direttori delle singole aste della struttura; il vettore t è costituito dalle componenti delle forze esterne applicate ai nodi della struttura; la matrice Q risulta diagonale ed è formata dai coefficienti di rigidezza delle singole aste; il vettore z è costituito dalle componenti delle variazioni termiche e dei cedimenti vincolari. I vettori incogniti x ed y sono costituiti rispettivamente dalle componenti delle reazioni interne delle aste e dalle componenti degli spostamenti dei nodi della struttura.

In relazione al sistema (14) si osserva che $\det Q \neq 0$, non potendo essere nulla la rigidezza di alcuna asta; $Ax = t$ risulta non compatibile per strutture reticolari labili (a meno di particolari valori delle forze esterne) e $\det (AA^*)$ risulta uguale a zero per strutture labili e per strutture apparentemente non labili. Escluse quindi le strutture labili e quelle apparentemente non labili, le soluzioni delle (14), in virtù del Teorema 2 e del Lemma 2, sono espresse da

$$x = A_{Q0}^{-1} t + (I - A_{Q0}^{-1} A) Q^{-1} z, \tag{15'}$$

$$y = H_{Q0}^{-1} A Q^{-1} z - H_{Q0}^{-1} t. \tag{15''}$$

Il valore di tali soluzioni non è differente da quello determinato attraverso il metodo degli spostamenti [15, p. 93].

È interessante tuttavia notare, che contrariamente a quanto avviene risolvendo il problema con i metodi classici delle forze e degli spostamenti, le (15) forniscono soluzioni espresse unicamente in termini di inversione della matrice A. Applicando le (15) non si pone più la distinzione tra il problema delle strutture isostatiche, la cui soluzione va ricercata nell'ambito dei problemi della statica, e il problema delle strutture iperstatiche, risolte con i mezzi forniti dalla scienza delle costruzioni. Si tratta in ambedue i casi di invertire la matrice A che per le prime risulta essere l'inversa di Cayley, per le seconde una opportuna inversa generalizzata che, come si è visto, coincide con la Q–inversa definita da Bjerhammar.

8. Nella pratica possono aversi ulteriori semplificazioni del sistema (14) e delle relative soluzioni. Tali semplificazioni sono determinate dalla mancanza di deformazioni esterne e cedimenti vincolari: $z = 0$; oppure dalla costanza dei coefficienti di rigidezza: $Q = qI$; oppure dalla coesistenza delle due ipotesi suddette.

Se $z = 0$:

$$x = A_{Q0}^{-1} t \tag{16'}$$

$$y = - H_{Q0}^{-1} t. \tag{16''}$$

Se $Q = qI$:

$$x = A_{I0}^{-1} t + q^{-1} (I - A_{I0}^{-1} A) z \tag{17'}$$

$$y = H_{I0}^{-1} A z - q H_{I0}^{-1} t, \tag{17''}$$

dove $A_{I0}^{-1} = A^* (AA^*)^{-1} \in A_{Q0}^{-1}$ è una inversa definita da Bjerhammar [9, p. 103] e $H_{I0} = (AA^*)$.

Se $z = 0$ e $Q = qI$:

$$x = A_{I0}^{-1} t \tag{18'}$$

$$y = - q H_{Q0}^{-1} t. \tag{18''}$$

Le (15), (16), (17), (18) forniscono tutte e sole le soluzioni del sistema (14), qualunque ipotesi si faccia sulla natura delle matrici A , Q , t , z, purchè siano rispettate le condizioni del Teorema 2.

9. Nel sistema (14) si ha Q d.p. e per la (11) e la (13) le soluzioni (16′) e (18′) risultano essere $\min_{Ax=t} \| x \|$.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. H. MOORE (1935) – *General Analysis*, Part. I, «Mem. Amer. Philos. Soc.», *1*, 197–209.

[2] A. BJERHAMMAR (1951) – *Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculations*, « Bull. Géodés. », 188–220.

[3] R. PENROSE (1955) – *A generalized inverse for matrices*, « Proc. Cambridge Philos. Soc. », 406–413.

[4] T. N. E. GREVILLE (1959) – *The pseudoinverse of rectangular or singular matrix and its application to the solution of linear equations* « SIAM Review », *2*, 38–43.

[5] T. N. E. GREVILLE (1960) – *Some applications of the pseudoinverse of a matrix* « SIAM Review », *2*, 15–22.

[6] E. ARGHIRIADE e A. DRAGOMIR (1963) – *Une nouvelle dèfinition de l'inverse généralisée d'une matrice*, « Acc. Naz. Lincei », *35*, 158–165.

[7] C. R. RAO (1962) – *A note on generalized inverse of a matrix with applications to problems of mathematical statistics*, « J. R. Stat. Soc., B. », *24*, 152–158.

[8] C. R. RAO (1971) – *Generalized inverse of matrices and its applications*, John Wiley.

[9] A. BJERHAMMAR (1973) – *Theory of errors and generalized matrix inverse*, Elsevir Scien. Publi. Co.

[10] E. ARGHIRIADE (1968) – *Sur l'inverse généralisée d'un opérateur linéaire dans les espaces de Hilbert*, « Acc. Naz. Lincei », *45*, 471–477.

[11] E. ARGHIRIADE e A. DRAGOMIR (1969) – *Remarques sur quelques théorèmes relatives à l'inverse généralisée d'un operateur linéaire dans les espaces de Hilbert*, « Acc. Naz. Lincei », *46*, 333–338.

[12] E. ARGHIRIADE e E. BOROS (1969) – *L'inverse généralisés d'un operateur linéaire dans un espace à produit intérieur*, « Acc. Naz. Lincei », *46*, 646–649.

[13] D. SHOWALTER e A. BEN ISRAEL (1970) – *Representation and computation of the generalized inverse of a bounded linear operator between Hilbert spaces*, « Acc. Naz. Lincei », *48*, 184–194.

[14] L. J. LARDY (1975) – *A series representation for the generalized inverse of a closed linear operator*, « Acc. Naz. Lincei », *58*, 162–157.

[15] S. DI PASQUALE (1975) – *Scienza delle costruzioni*, Milano.