
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ALBINO CANFORA

**Esistenza e unicità delle soluzioni di un problema al
contorno relativo ad un'equazione ellittico-parabolica**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 60 (1976), n.2, p. 108–110.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_2_108_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Equazioni a derivate parziali. — *Esistenza e unicità delle soluzioni di un problema al contorno relativo ad un'equazione ellittico-parabolica.* Nota di ALBINO CANFORA, presentata (*) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — In this Note a boundary-value problem for a 4th order elliptic-parabolic equation is presented. Theorems of existence and uniqueness in a suitable Sobolev space are also announced. This result is a particular case of a more general theorem concerning a class of $2m$ order elliptic-parabolic operators.

In una Memoria di prossima pubblicazione [1], ho considerato i problemi al contorno che si pongono per una classe di operatori ellittico-parabolici di ordine $2m$, stabilendo dei teoremi di esistenza, unicità e regolarizzazione. Mi propongo qui di illustrare i risultati ottenuti, riferendomi, per semplicità, ad un esempio concreto in cui è assegnato un operatore del quarto ordine in un dominio piano.

Detto η un numero reale positivo, consideriamo, nel piano euclideo R^2 di generico punto (x, t) , il dominio:

$$G = \{(x, t) \mid t \geq \eta, x^6 + (t - \eta)^6 \leq 1\} \cup \{(x, t) \mid -1 \leq t \leq \eta, |x| \leq 1\},$$

e poniamo:

$$\Gamma = \partial G, \quad \Sigma_0 = \{(x, t) \in \Gamma \mid t = -1\}, \quad \Gamma_0 = \Gamma - \Sigma_0.$$

Consideriamo anche la funzione:

$$a(x, t) = \begin{cases} t^{4+\theta} & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0, \end{cases}$$

dove θ è un numero reale positivo.

Detti: q e c due ulteriori numeri reali positivi, introduciamo in G l'operatore ellittico-parabolico:

$$L = D_x^4 + D_t^2 (a D_t^2 \cdot) + q D_t^3 + c.$$

Per tale operatore poniamo (formalmente) il problema al contorno:

$$(1) \quad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \overset{\circ}{G}, \quad \text{con } f \in L^2(G) \\ u|_{\Gamma_0} = D_\nu u|_{\Gamma_0} = 0, \quad u|_{\Sigma_0} = 0. \end{cases}$$

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1976.

Precisiamo il quadro funzionale in cui ci si pone. Si introduce, anzitutto, lo spazio di Banach:

$$\mathcal{H}(G) = \{u \in L^2(G) \mid D_x^4 u, D_t^3 u, a(x, t) D_t^4 u \in L^2(G); u|_{\Gamma_0} = D_\nu u|_{\Gamma_0} = u|_{\Sigma_0} = 0\},$$

munito della norma:

$$\|u\|_{\mathcal{H}(G)} = [\|D_x^4 u\|_{L^2(G)}^2 + \|a D_t^4 u\|_{L^2(G)}^2 + \|D_t^3 u\|_{L^2(G)}^2 + \|u\|_{L^2(G)}^2]^{1/2}.$$

Si considera, poi, il sottospazio di $\mathcal{H}(G)$:

$$\mathcal{G}(G) = \{u \in \mathcal{H}(G) \mid D_t u|_{\Sigma_0} = 0\},$$

e si prova un teorema di esistenza di soluzioni deboli del problema (I); si prova, cioè, il seguente:

TEOREMA I. *Per ogni $f \in L^2(G)$ esiste almeno una $u \in L^2(G)$ tale che risulti:*

$$(2) \quad \int_G u L^* v \, dx \, dt = \int_G f v \, dx \, dt, \quad \forall v \in \mathcal{G}(G).$$

Si stabilisce, inoltre, agevolmente un teorema di unicità per il problema (I), nello spazio $\mathcal{H}(G)$. Si prova, cioè, che:

$$\text{TEOREMA II. } \{u \in \mathcal{H}(G), Lu = 0\} \Rightarrow \{u = 0\}.$$

La parte centrale del lavoro consiste nel collegare i Teoremi I e II; consiste cioè nello stabilire il seguente:

TEOREMA III (di regolarizzazione). *Se $u \in L^2(G)$ verifica l'equazione (2), allora si ha:*

$$(3) \quad u \in \mathcal{H}(G), \text{ e } u \text{ verifica quasi ovunque le (I).}$$

Ben si comprende come dai Teoremi I, II e III discenda immediatamente il seguente:

TEOREMA IV (di esistenza e unicità). *Per ogni $f \in L^2(G)$ esiste una ed una sola $u \in \mathcal{H}(G)$ che risolva il problema (I).*

Lo spazio $\mathcal{H}(G)$ è un particolare spazio di Sobolev con peso, e la dimostrazione del teorema di regolarizzazione (III) si consegue adattando opportunamente certe tecniche introdotte da M. Troisi nella Memoria [2]. In tal modo si riesce appunto a provare che ogni $u \in L^2(G)$ verificante la (2) è, in realtà, una funzione per la quale riesce: $a D_t^4 u \in L^2(G)$.

Ulteriori accorgimenti si rendono necessari per regolarizzare le u verificanti la (2) in vicinanza dei punti angolosi di ∂G [e cioè dei punti di $\bar{\Gamma}_0 \cap \Sigma_0$].

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. CANFORA - *Esistenza e unicità delle soluzioni di un problema al contorno relativo ad un'equazione ellittico-parabolica di ordine $2m$* , « Ricerche di Matematica », in corso di stampa.
- [2] M. TROISI (1969) - *Problemi ellittici con dati singolari*, « Annali di Matematica pura ed applicata », 83, 363-407.