Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Vranceanu

Una classificazione delle superfici chiuse ed orientabili mediante il parallelismo di Levi-Civita

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.1, p. 42–44.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_1_42_0>

Geometria differenziale. — *Una classificazione delle superfici chiuse ed orientabili mediante il parallelismo di Levi-Civita.* Nota di GIORGIO VRANCEANU, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Given a closed and orientable surface S of genus p, it is shown that we can divide S in $N = q + \eta + q + 2p - 2$ regular parts where q is an entire number and η is equal to one or to zero.

Data una superficie S chiusa ed orientabile si sa che su questa superficie ha luogo la formula di Gauss-Bonnet

$$\iint_S k \, d\sigma = 4\pi(1 - p), \tag{1}$$

dove k è la curvatura di Gauss di S, $d\sigma$ è l'elemento d'area, e p è il genere. D'altra parte data una regione semplicemente connessa D di S si ha la formula

$$\int_C k_g \, ds + \iint_D k \, d\sigma = 2\pi, \tag{2}$$

dove C è la frontiera di D orientata in modo da lasciare a sinistra D, k_g è la curvatura geodetica di C e s è l'arco. Si mostra altresì che la variazione dell'angolo, diciamolo ψ, tra un vettore fisso e un vettore v che si trasporta per parallelismo lungo C, è data dalla formula di Levi-Civita [1]:

$$\Delta\psi = -\int_C k_g \, ds. \tag{3}$$

Supponiamo ora che in D si abbia $k > 0$ e che $\Delta\psi = 0$, sicchè il vettore v ritorna alla stessa posizione dopo il trasporto per parallelismo. In questo caso si hanno per D le formule

$$\iint_{D\, k>0} k \, d\sigma = 2\pi \quad , \quad \int_C k_g \, ds = 0 \tag{4}$$

e diremo che D costituisce una cella *positiva* di S.

Diremo altresi che D′ è una cella *neutra* se la (2) è verificata in conseguenza delle

$$\iint_{D'} k \, d\sigma = 0 \quad , \quad \int_{C'} k_g \, ds = 2\pi. \tag{5}$$

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1976.

In questo caso il vettore v ritorna alla stessa posizione, ma $\Delta\psi = -2\pi$, sicchè ψ diminuisce di 2π. Infine chiamiamo una cella D″ *negativa* se si hanno le

$$\iint\limits_{D''k<0} k \, d\sigma = -2\pi \quad , \quad \int\limits_{C''} k_g \, ds = 4\pi . \tag{6}$$

In questo caso il vettore v ritorna alla posizione iniziale, ma l'angolo ψ diminuisce di 4π.

Denotando con α la quantità $\iint k \, d\sigma$, dove $k > 0$, e scrivendo α sotto la forma

$$\alpha = 2\pi q + \varepsilon \qquad (0 \leq \varepsilon < 2\pi),$$

dove q sia un intero non negativo, si mostra che possiamo dividere la superficie in q celle positive, una o nessuna cella neutra e $q + 2p - 2$ celle negative.

Abbiamo così il teorema:

Possiamo dividere una superficie S *chiusa ed orientabile di genere p in*

$$N = q + \eta + q + 2p - 2 \tag{7}$$

regioni regolari (celle), dove q è un numero intero non negativo e dove η è uno o zero.

Se la superficie è immersa in E_3, allora si ha $q \geq 2$ [2]. La formula (7) ci mostra che la differenza tra il numero q di celle positive ed il numero $q + 2p - 2$ di celle negative è $2 - 2p$, ossia uguaglia la caratteristica di Eulero di S, numero che apparisce anche nella (1). Ne risulta che per una superficie di genere zero il numero delle celle positive sorpassa di due unità il numero delle celle negative; per la sfera si ha $q = 2$, $\eta = 0$ e si ottiene il teorema di Levi-Civita [3].

Per una superficie di genere 1, come il toro, le celle positive e le celle negative sono in numero uguale. Si vede subito che per il toro dello spazio E_3 tale numero è due, e si ha $\eta = 0$; mentre per il toro dello spazio a quattro dimensioni [prodotto di due cerchi]

$$y^1 = \cos u \quad , \quad y^2 = \operatorname{sen} u \quad , \quad y^3 = \cos v \quad , \quad y^4 = \operatorname{sen} v, \tag{8}$$

abbiamo una sola cella, quella neutra.

Due superficie S ed S′ con la stessa formula (7) [od aventi lo stesso gruppo di olonomia], si possono chiamare a parallelismo uguale. Questo avviene per esempio se abbiamo

$$k \, d\sigma = k' \, d\sigma', \tag{9}$$

ossia se S , S′ sono ad aree gaussiane uguali.

Se la superficie S ha come metrica

$$ds^2 = e^{2a} [du^2 + dv^2] , \tag{10}$$

si può vedere che la superficie S′ con metrica

$$ds'^2 = e^{2\alpha+2\varphi} [du^2 + dv^2] \tag{11}$$

ha la sua stessa area gaussiana se φ è una funzione armonica, ossia se

$$\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0 , \tag{12}$$

ed inversamente.

Si può osservare che la decomposizione in celle si può considerare anche per le superficie aperte; ma in questo caso in generale il numero delle celle risulta infinito. Possiamo osservare altresì che si può fare la differenza o la somma di due celle, tenendo sempre conto della formula (2).

BIBLIOGRAFIA

[1] T. LEVI-CIVITA (1933–34) – *Curve chiuse sghembe a parallelismo monodromo sopra la sfera*, « Acta Pontificia, Nuovi Lincei », *87*.

[2] K. VOSS (1960) – *Differential-geometrie geschlossener Flächen in Euklidischen Rourm*, I, « Sounderdruck aus Jahresber. der Deutschen Math.-Ver. », *63*, 117–135.

[3] G. VRANCEANU (1971–72) – *Sur un théorème de Levi-Civita*, « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino », *31*, 149–155.