
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

CLAUDIO CITRINI

**Sull'urto parzialmente elastico o anelastico di una
corda vibrante contro un ostacolo. Nota I**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 59 (1975), n.5, p. 368–376.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_5_368_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_5_368_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sull'urto parzialmente elastico o anelastico di una corda vibrante contro un ostacolo.* Nota I di CLAUDIO CITRINI, presentata (*) dal Corrisp. L. AMERIO.

SUMMARY. — We study the motion of a vibrating string in presence of a wall parallel to the position of the string at rest. We suppose that the impact against the wall is partially elastic or anelastic. We prove that, in the first case, if there is an impact then there is an infinity of impacts. In the second case, on the contrary, the number of impacts is always finite.

§ 1. INTRODUZIONE

Nel presente lavoro viene studiato l'urto parzialmente elastico e quello anelastico di una corda vibrante omogenea, fissata agli estremi, contro una parete rigida. Il caso elastico è stato oggetto recentemente di una Memoria [1] di Amerio e Prouse, dei cui metodi e risultati faremo ampiamente uso.

Consideriamo quindi una corda omogenea di lunghezza l , i cui estremi $x = 0$ ed $x = l$ siano fissi. In assenza di forze attive il moto della corda libera è determinato dall'equazione

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

in cui $y = y(x, t)$ rappresenta lo spostamento dalla posizione di equilibrio del generico punto x della corda, all'istante t .

Alla (1.1) vanno aggiunte le condizioni ai limiti

$$(1.2) \quad y(0, t) = y(l, t) = 0$$

e le condizioni iniziali

$$(1.3) \quad \begin{cases} y(x, 0) = \varphi(x) \\ y_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

Utilizzando le coordinate caratteristiche

$$(1.4) \quad \xi = \frac{x+t}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{-x+t}{\sqrt{2}},$$

$$(1.5) \quad \left(\Rightarrow x = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}, \quad t = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}} \right)$$

l'equazione (1.1) diviene

$$(1.6) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

(*) Nella seduta del 15 novembre 1975.

Riguardo alle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ che compaiono nelle (1.3) faremo le stesse ipotesi di [1], cioè:

(1.7 a) $\varphi(x)$ sia continua in $0 \leq x \leq l$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi(x) < K$,

(1.7 b) $\varphi'(x)$ e $\psi(x)$ siano continue in $0 \leq x \leq l$, tranne al più un numero finito di punti, nei quali ammettano discontinuità di prima specie,

(1.7 c) le derivate nelle direzioni caratteristiche

$$y_{\xi}|_{t=0} = \frac{\varphi'(x) + \psi(x)}{\sqrt{2}}, \quad y_{\eta}|_{t=0} = \frac{-\varphi'(x) + \psi(x)}{\sqrt{2}}$$

non si annullino in $0 \leq x \leq l$, tranne al più un numero finito di punti e di intervalli.

L'ostacolo è costituito da una parete rigida, $y = K$, che costringe la corda a vibrare nel semipiano $y \leq K$; la soluzione dovrà quindi soddisfare la condizione unilaterale

$$(1.8) \quad y(x, t) \leq K \quad \forall 0 \leq x \leq l, t \geq 0.$$

L'urto contro la parete si suppone elastico, parzialmente elastico, o anelastico: tale fatto viene tradotto con la condizione che in ogni punto di urto $P_0(x_0, t_0)$ risulti:

$$(1.9) \quad y_t(x_0, t_0^+) = -h y_t(x_0, t_0^-) \quad (0 \leq h \leq 1).$$

Nella (1.9) h è una costante, detta *coefficiente di restituzione*, che può assumere un valore qualsiasi dell'intervallo $0 \leq h \leq 1$; in particolare per $h = 0$ diremo che l'urto è *anelastico*, per $0 < h < 1$ parleremo di urto *parzialmente elastico*, mentre per $h = 1$ abbiamo il caso dell'urto *elastico* (già trattato in [1]).

Rimandiamo per brevità alla Memoria [1] per quanto riguarda:

(a) il significato da attribuire alla *soluzione del problema* in presenza delle condizioni (1.8) e (1.9);

(b) la definizione e le proprietà delle *linee di influenza* della parete, nonché degli *archi d'urto* (impact lines).

Tali nozioni si mantengono infatti inalterate nel presente lavoro, con l'unica avvertenza che in [1] la condizione (1.9) compare sempre con $h = 1$.

Indicheremo, per semplicità di notazione, con la lettera y non solo la soluzione del problema posto, nel senso di [1], ma anche quella (indicata in [1] con z) dei problemi di Cauchy, Goursat e Darboux relativi all'equazione libera (1.1): questo non dà luogo ad equivoci, essendo chiaro dal contesto il significato da attribuire volta per volta.

§ 2. ENUNCIATI

In questo Lavoro, dopo aver stabilito l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema esposto nel § 1, ci occupiamo della questione del *numero possibile di urti*. Come mostrano i Teoremi 2 e 3, il caso dell'urto anelastico si differenzia dagli altri in modo a prima vista sorprendente. Un'altra sostanziale differenza si ha nello studio del *problema retrogrado*: mentre nel caso elastico, o parzialmente elastico, è possibile risolvere univocamente tale problema, ciò non avviene nel caso anelastico, in quanto per $h = 0$ la (1.9) non permette il calcolo di $y_i(x_0, t_0^-)$ nei punti di urto: l'urto anelastico si rivela quindi parzialmente *privo di memoria*.

TEOREMA 1. *Il problema enunciato nel § 1 ammette una ed una sola soluzione (nel senso di [1]) soddisfacente le condizioni (1.2), (1.3), (1.7) (1.8) e (1.9) per ogni h , $0 \leq h \leq 1$.*

TEOREMA 2. *Nel caso di urto elastico o parzialmente elastico ($0 < h \leq 1$) il numero degli urti è infinito (se ve ne è almeno uno).*

TEOREMA 3. *Nel caso anelastico ($h = 0$) il numero degli urti è sempre finito.*

Per la dimostrazione di quest'ultimo teorema ci sarà utile la seguente *definizione*: chiamiamo *coppia (m)* una coppia di segmenti consecutivi, PQ e QR, appartenenti ad una medesima linea di influenza, il primo dei quali faccia parte di una caratteristica ξ ed il secondo di una caratteristica η , e tali che nell'estremo comune Q risulti $y(Q) < K$.

Tali coppie possono esistere (cfr. [2], E.C. di [1]).

L'importanza di tali coppie è messa in luce dai seguenti lemmi, che verranno utilizzati nella dimostrazione del Teorema 3.

LEMMA 1. *Condizione necessaria e sufficiente, nel caso anelastico, affinché una linea di influenza λ , di equazione $t = t(x)$, sia l'ultima, è che λ non possieda coppie (m) e risulti $y(x, t(x)) \geq 0 \forall x$.*

LEMMA 2. *In caso di urto qualunque, ogni linea di influenza successiva alla prima possiede al più una coppia (m).*

LEMMA 3. *Nel caso anelastico esiste una linea di influenza che non possiede coppie (m). Inoltre, se una linea di influenza non possiede coppie (m), non ne posseggono neppure le successive.*

§ 3. DIMOSTRAZIONI DEI TEOREMI 1 E 2, E DEI LEMMI 1 e 2

TEOREMA 1. Poiché la dimostrazione di questo teorema non si discosta sostanzialmente da quella analoga di [1], riportiamo solo le modifiche che si devono apportare.

durte, invece, nel seguente modo: detta $t = t(x)$, $a \leq x \leq b$ l'equazione di un arco d'urto, risulta $\forall x \in a \rightarrow b \quad \forall t \geq t(x) : y(x, t) \equiv K$. In un intorno delle semirette $x = a, t \geq t(a)$ e $x = b, t \geq t(b)$ (non caratteristiche) non sarebbe però verificata l'equazione della corda libera.

(b) Nella determinazione della costante $\delta > 0$, che dà la distanza tra due linee di influenza consecutive, basta osservare che la derivata y_η (ad esempio) non mantiene in generale più lo stesso modulo lungo una caratteristica ξ , ma questo viene ridotto del fattore $h \leq 1$ ogniquilvolta la caratteristica interseca un arco d'urto. Rimane perciò a maggior ragione valida la maggiorazione

$$(3.3) \quad |y_\eta(M)| \leq \mu,$$

ove è sempre

$$(3.4) \quad \mu = \text{Sup}_{a \rightarrow b} \frac{|\varphi'(x)| + |\psi(x)|}{\sqrt{2}}.$$

Il valore $\delta = K/2 \mu$ rappresenta ancora, pertanto, un limite inferiore per la distanza tra due linee di influenza consecutive.

Prima di passare alla dimostrazione dei Teoremi 2 e 3, conviene mostrare come si può calcolare la soluzione lungo i segmenti AB e BC (fig. 1): si osservi anzitutto che in questa è $y(H_i) = K$ per $i \neq 5$, $y(H_5) \leq K$.

Il calcolo di $F(\xi) = y(\xi, \eta_A)$ si riduce sostanzialmente alla risoluzione di un numero finito di problemi di Darboux, a partire dalla soluzione valutata sulla spezzata $AH_1 L_1 H_2 H_3 L_2 H_4 H_5 H_6 L_3 H_7 C$. Risulta ad esempio

$$y(J') = y(J) + y(H_2') - y(H_2), \quad \text{ove}$$

$$y(H_2') = y(A) + y(L_1) - y(H_1), \quad \text{ecc.}$$

e pertanto l'andamento di $F(\xi)$ in $H_2' H_3'$ coincide, a meno di una costante, con quello di y lungo $H_2 H_3$. In particolare le derivate rispetto a ξ si propagano inalterate lungo le caratteristiche η e viceversa, per cui ad esempio $y_\xi(J') = y_\xi(J)$. Otteniamo perciò i seguenti risultati.

1. Urto anelastico.

a) Lungo le proiezioni dei segmenti di caratteristica (come $H_2' H_3'$) $F(\xi)$ varia assumendo il valore massimo in entrambi gli estremi.

b) Lo stesso avviene in $H_4' H_5'$, purchè $H_4 H_5 H_6$ non formi una coppia (m).

c) Se invece $H_4 H_5 H_6$ forma una coppia (m), $F(\xi)$ decresce di un valore α in $H_4' H_5'$, ove $\alpha = y(H_4) - y(H_5) = K - y(H_5) > 0$ (α dipende perciò dalla coppia (m) considerata).

d) Lungo le proiezioni degli archi d'urto $F(\xi)$ è costante; in particolare $F(\xi) \equiv 0$ in AH_2' e in $H_3' H_4'$, $F(\xi) \equiv -\alpha$ in $H_5' H_7'$ ($\alpha = 0$ se non ci

sono coppie (m)); perciò $F(A) = F(H_2') = F(H_3') = F(H_4') = 0$, $F(H_5') = F(H_7') = -\alpha$: inoltre per $J' \in AH_5'$ è $y(J') = y(J) - K$ ($\Rightarrow y \leq 0$) mentre per $J' \in H_7'B$ è $y(J') = y(J) - K - \alpha$ ($\Rightarrow y \leq -\alpha$).

e) Lungo $H_7'B$, proiezione dell'ultimo segmento di caratteristica ξ , $F(\xi)$ decresce di K .

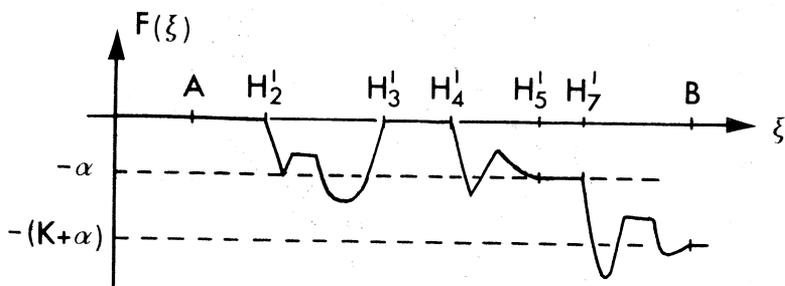


Fig. 2.

f) Risulta $y(B) = -K - \Sigma\alpha$, ove la somma si estende a tutte le eventuali coppie $(m) \in \lambda$, ed α ha il significato dato in (c).

2. Urto elastico o parzialmente elastico.

Si devono modificare solo i seguenti punti:

d') Lungo le proiezioni degli archi d'urto $F(\xi)$ decresce in senso stretto.

f') Risulta $y(B) < -K - \Sigma\alpha \leq -K$.

Analoghe considerazioni si possono fare sulla funzione $G(\eta) = y(\xi_B, \eta)$.

TEOREMA 2. Supponiamo, per assurda ipotesi, che la linea λ della fig. 3 sia l'ultima. Risolvendo il Problema di Darboux per la (1.1) relativo al rettangolo $A^*BC^*B^*$ otteniamo, per la (1.2):

$$y(B^*) = y(A^*) + y(C^*) - y(B) = -y(B) > K$$

per quanto detto in f'). Esiste pertanto un'altra linea di influenza, contro l'ipotesi fatta.

La dimostrazione del Teorema 3 seguirà da quella dei Lemmi 1, 2, 3.

LEMMA 1. Le condizioni sono necessarie. Infatti se esiste su λ (fig. 3) una coppia (m) almeno, risulta, come mostrato al punto 1f) precedente, $y(B) = -K - \Sigma\alpha < -K$. È allora, come prima, $y(B^*) > K$, sicchè esiste un'altra linea di influenza.

Supponiamo ora che esista un punto $J \in \lambda$ tale che $y(J) < 0$; ammettiamo ad esempio che J appartenga ad una caratteristica ξ (fig. 3). Risulta (cfr. figg. 1 e 2, e punto 1d) precedente): $y(J') < -K$. Ma per la (1.2) è $y(J^0) = y(C^*) = 0$, e quindi $y(J'') = y(J^0) + y(C^*) - y(J') = -y(J') > K$, ed ancora deve esistere un'altra linea di influenza.

Le condizioni sono *sufficienti*. Infatti esse garantiscono, per l'analisi svolta nel punto 1 d) con $\alpha = 0$, che risulta $-K \leq F(\xi) \leq 0$ in tutto AB.

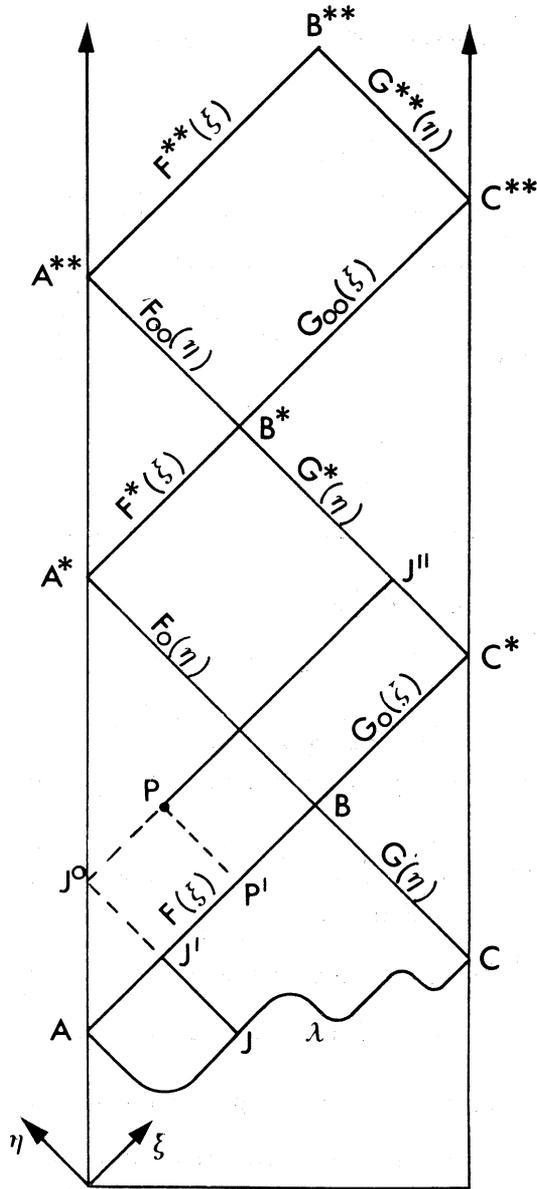


Fig. 3.

Inoltre la soluzione del problema di Goursat per la (1.1) relativo al triangolo ABA^* ($\xi_A \leq \eta \leq \xi \leq \xi_B$) è data da (fig. 3):

$$y(P) = y(P') + y(J^0) - y(J'), \quad \text{ove}$$

$$P = (\xi, \eta), J^0 = (\eta, \eta), P' = (\xi, \xi_A), J' = (\eta, \xi_A),$$

(cioè $y(\xi, \eta) = F(\xi) - F(\eta)$). È immediato allora dedurre che in ABA^* risulta $y \leq K$. In più, posto $F_0(\eta) = y(\xi_B, \eta)$, risulta (per il punto if) con $\alpha = 0$):

$$(3.5) \quad F_0(\eta) = y(B) - F(\eta) = -K - F(\eta),$$

da cui $-K \leq F_0(\eta) \leq 0$. Analogamente si ragiona nel triangolo CBC^* ; anche la soluzione valutata sul segmento BC^* , cioè $G_0(\xi) = -K - G(\xi - l\sqrt{2})$, soddisfa la condizione $-K \leq G_0(\xi) \leq 0$. Risolvendo ora il problema di Darboux nel rettangolo $A^*BC^*B^*$, si ha:

$$(3.6) \quad y(\xi, \eta) = G_0(\xi) + F_0(\eta) + K \leq K.$$

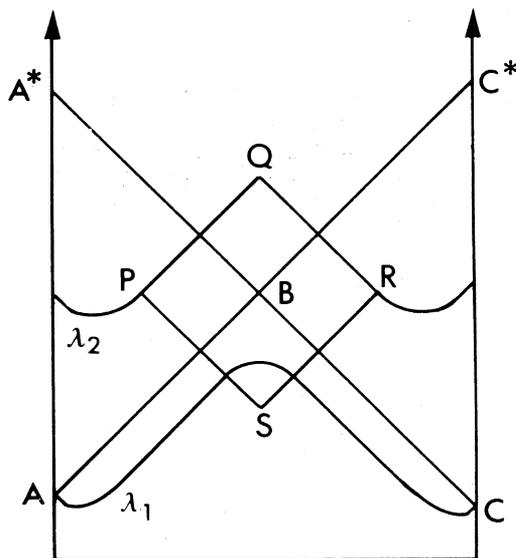


Fig. 4.

Troviamo in particolare, lungo il segmento A^*B^* (essendo $F_0(\eta_{A^*}) = 0$):

$$(3.7) \quad 0 \leq y(\xi, \eta_{A^*}) = F^*(\xi) = G_0(\xi) + K = -G(\xi - l\sqrt{2}) \leq K,$$

ed analogamente per $G^*(\eta) = F_0(\eta) + K = -F(\eta)$, che rappresenta la soluzione in B^*C^* . Ma per la (3.7) risulta, in tutto $A^*B^*A^{**}$:

$$y(\xi, \eta) = F^*(\xi) - F^*(\eta) \leq K \quad (y(B^*) = K)$$

ed in particolare lungo $A^{**}B^*$ è $0 \leq y(\xi_{B^*}, \eta) = F_{00}(\eta) = K - F^*(\eta) = K + G(\eta - l\sqrt{2}) \leq K$; analogamente lungo B^*C^{**} è $0 \leq y(\xi, \eta_{B^*}) = G_{00}(\xi) = G^*(\eta - l\sqrt{2}) + K = F(\eta - l\sqrt{2}) + K \leq K$. Nel rettangolo $A^{**}B^*C^{**}B^{**}$ è infine

$$y(\xi, \eta) = G_{00}(\xi) + F_{00}(\eta) - K \leq K.$$

Poiché lungo $A^{**}B^{**}$ risulta $y = F^{**}(\xi) = F(\xi - l\sqrt{2})$, ed analogamente in $B^{**}C^{**}$ è $y = G^{**}(\eta) = G(\eta - l\sqrt{2})$, il procedimento si ripete identicamente in tutta la rimanente semistriscia, mostrando che è *sempre* $y \leq K$. Ciò garantisce appunto che non ci sono più linee di influenza.

LEMMA 2. Sia PQR una coppia (m) appartenente alla linea di influenza λ_2 (fig. 4). Risulta $y(P) = y(R) = K$, $y(Q) = K - \alpha < K$. Pertanto, se il punto S si trova al di sopra della linea λ_1 o su λ_1 , risulta $y(S) = K + \alpha > K$, assurdo. *Il punto S si trova perciò al di sotto di λ_1* : allora P appartiene necessariamente al triangolo ABA^* , R al triangolo CBC^* e Q al rettangolo $A^*BC^*B^*$, e ciò può avvenire *una sola volta* al più sulla linea λ_2 . Lo stesso ragionamento si applica tra λ_j e λ_{j+1} .

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. AMERIO e G. PROUSE (1975) - *Study of the motion of a string vibrating against an obstacle*, « Rend. di Mat. » (2), 8, ser. VI, 563-585.
- [2] L. AMERIO e G. PROUSE (1975) - ERRATA CORRIGE relativa alla Nota « *Study of the motion of a string vibrating against an obstacle* », « Rend. di Mat. » (3), 8, ser. VI, senza pagina.