Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Congedo, Antonio Lepore

Su un sistema di equazioni integrali di Volterra di prima specie non riconducibile ad uno di seconda specie. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.4, p. 515–523.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_4_515_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Analisi matematica. — *Su un sistema di equazioni integrali di Volterra di prima specie non riconducibile ad uno di seconda specie.* Nota II di GIUSEPPE CONGEDO e ANTONIO LEPORE, presentata [*] dal Corrisp. G. FICHERA.

SUMMARY. — This Note II continues the research initiated in Note I. Now the Mellin transform is used and a new existence and uniqueness theorem, in a suitable function class, is proved. An explicit solution in closed form is exhibited.

3. STUDIO DEL SISTEMA (1.1) MEDIANTE LA TRASFORMAZIONE DI MELLIN [3]

Nei paragrafi precedenti abbiamo studiato e risolto il sistema (1.1) dimostrando l'esistenza della soluzione u nella classe $C^m[0, x_0]$.

L'intero m dipende dal « dato » φ a causa della (1.7).

Cercheremo ora, seguendo la prof. Sneider, di provare l'esistenza della soluzione di (1.1) in una classe di funzioni assegnata « a priori », non dipendente dal « dato » φ.

Volendo, a tale scopo, applicare la tecnica della trasformazione di Mellin, dovremo supporre che la soluzione $u(x)$ e la $\psi(x)$ siano definite in $(0, +\infty)$.

D'altra parte, poichè interessa la restrizione di $u(x)$ in $[0, x_0]$, è sufficiente supporre che $\psi(x)$ sia a supporto compatto contenuto in $[0, X]$, con $X > x_0$.

Sia $\mathcal{M}$ la classe delle funzioni $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x))$, tali che:

i) $u(x)$ è definita e continua in $(0, +\infty)$;

ii) per ogni $u \in \mathcal{M}$, esiste $\xi_0 > 0$ tale che, per $0 < \xi < \xi_0$, si ha, per ogni $x > 0$,

$$|u(x)| \leq K_\xi x^{-\xi}, \tag{3.1}$$

essendo K_ξ una costante positiva che dipende solo da u e da ξ.

Si ha intanto che, se $u \in \mathcal{M}$, posto $\zeta = \xi + i\eta$, con $0 < \xi < \xi_0$, la funzione reale $|x^{\zeta-1} u(x)|$ è sommabile in $(0, +\infty)$.

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1975.

(3) La numerazione dei paragrafi e delle formule della presente Nota, segue quella della Nota I dello stesso titolo.

Infatti, detti ξ' e ξ'' due numeri reali tali che $0 < \xi' < \xi < \xi'' < \xi_0$, si ha, per $x > 0$,

$$|x^{\zeta-1} u(x)| = |u(x)| x^{\xi-1} \leq K_{\xi'} \frac{1}{x^{1-(\xi-\xi')}} ; \tag{3.2}$$

$$|x^{\zeta-1} u(x)| \leq K_{\xi''} \frac{1}{x^{1+(\xi''-\xi)}} .$$

La I disuguaglianza prova che $|x^{\zeta-1} u(x)|$ è sommabile in $(0, 1)$, mentre la II prova che $|x^{\zeta-1} u(x)|$ è sommabile in $(1, +\infty)$. Pertanto per ogni $u \in \mathcal{M}$, esiste, per $0 < \mathcal{R}\zeta < \xi_0$, la trasformata di Mellin

$$\int_0^{+\infty} x^{\zeta-1} u(x) \, dx .$$

Tale trasformata è funzione olomorfa di ζ nella striscia: $0 < \mathcal{R}\zeta < \xi_0$.

Dimostreremo per il sistema (1.1) un teorema di esistenza e unicità nella classe $\mathcal{M}$, e daremo contemporaneamente un'espressione esplicita della soluzione sotto le seguenti ipotesi per φ e ψ:

a) $\varphi(s) \in C^1[0, 1]$; *b)* $\det \varphi(1) \neq 0$; *c)* $\det \int_0^1 \varphi(s) \, ds \neq 0$;

d) $\psi(x) \in C^2(0, +\infty)$; *e)* ψ ha supporto compatto contenuto in $[0, X]$, con $X > x_0$;

f) $\psi''(x)$ assolutamente continua in ogni intervallo $[0, t]$ $(t > 0)$;

g) $\psi(x) = x\psi_0(x)$ con $\psi_0(x) \in C^0[0, +\infty)$.

Supponiamo inoltre $X > 1$.

Sussiste il seguente teorema:

I) *Esiste, nella classe* $\mathcal{M}$, *una ed una sola soluzione del sistema* (1.1). *Essa è data dalla seguente formula*:

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-(\xi+i\eta)} \left[\left(\int_0^1 t^{-(\xi+i\eta)} \varphi(t) \, dt \right)^{-1} \int_0^{+\infty} t^{\xi-2+i\eta} \psi(t) \, dt \right] d\eta , \tag{3.3}$$

per $0 < \xi < \xi_0$, *con* ξ_0 *opportuna costante positiva, essendo sommabile la funzione che compare sotto l'integrale* $\int_{-\infty}^{+\infty}$.

Sia:

$$\Psi(\zeta) = \int_0^{+\infty} x^{\zeta-2} \psi(x) \, dx = \int_0^{+\infty} x^{\zeta-1} \psi_0(x) \, dx \quad ; \quad \Psi_1(\zeta) = \int_0^{+\infty} x^{\zeta-1} \psi'(x) \, dx ;$$

$$\Phi(\zeta) = \int_0^1 x^{-\zeta} \varphi(x) \, dx \quad ; \quad \Phi_1(\zeta) = \int_0^1 x^{1-\zeta} \varphi'(x) \, dx .$$

Osserviamo che $\Psi_1(\zeta)$ è olomorfa nel semipiano $\mathscr{R}\zeta > 0$, mentre $\Phi_1(\zeta)$ è olomorfa nel semipiano $\mathscr{R}\zeta < 2$. Pertanto esse sono simultaneamente olomorfe nella striscia $0 < \mathscr{R}\zeta < 2$.

Integrando per parti si ha:

$$\Psi_1(\zeta) = -\int_0^{+\infty} (\zeta - 1)\, x^{\zeta-2}\, \psi(x)\, dx = (1 - \zeta)\, \Psi(\zeta)\,;$$

$$\Phi_1(\zeta) = \varphi(1) + \int_0^1 (\zeta - 1)\, x^{-\zeta}\, \varphi(x)\, dx = \varphi(1) - (1 - \zeta)\, \Phi(\zeta)\,;$$

da cui

$$\Psi(\zeta) = \frac{\Psi_1(\zeta)}{1 - \zeta}$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi(1) - \Phi_1(\zeta)}{1 - \zeta}\,.$$

Alla dimostrazione del Teorema I è opportuno premettere lo studio del comportamento di $\Psi_1(\xi + i\eta)$ e di $\Phi_1(\xi + i\eta)$ al tendere a $+\infty$ di $|\eta|$.

Fissiamo $\delta \in \mathbf{R}$ tale che $0 < \delta < 2$. Preso $\varepsilon > 0$, si può determinare t_ε, $0 < t_\varepsilon < 1$, tale che risulti:

$$\int_0^{t_\varepsilon} x^{\delta-1}\, |\psi'(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Sia $\rho(x)$ una funzione $(\rho_1(x), \rho_2(x), \cdots, \rho_n(x))$ con le $\rho_h(x)$ funzioni costanti a tratti, a supporto contenuto in $[t_\varepsilon, X]$, tale che:

$$|\psi'(x) - \rho(x)| < \frac{\varepsilon\delta}{3X^2}\, (t_\varepsilon \le x \le X)\,.$$

Si può scrivere

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda^{(k)}(x) \qquad \text{dove } \lambda^{(k)}(x) = \begin{cases} \gamma^{(k)} & \text{per } \alpha_k \le x < \beta_k\,, \\ 0 & \text{per gli altri } x; \end{cases}$$

con $\gamma^{(k)}$ vettori costanti $(\gamma_1^{(k)}, \cdots, \gamma_n^{(k)})$ e con $[\alpha_k, \beta_k]$ contenuto in $[t_\varepsilon, X]$.

Sia η un numero reale tale che

$$|\eta| > \frac{6}{\varepsilon}\, X^2 \sum_{k=1}^{m} |\gamma^{(k)}|\,.$$

Per $\delta \leq \xi \leq 2$ e $\zeta = \xi + i\eta$, si ha:

$$\left| \int_0^{+\infty} x^{\zeta-1} \psi'(x)\, dx \right| \leq \left| \int_0^{t_\varepsilon} x^{\zeta-1} \psi'(x)\, dx \right| + \int_{t_\varepsilon}^{+\infty} | x^{\zeta-1} | \, | \psi'(x) - \rho(x) | \, dx +$$

$$+ \left| \int_{t_\varepsilon}^{+\infty} x^{\zeta-1} \rho(x)\, dx \right| < \int_0^{t_\varepsilon} x^{\delta-1} \, | \psi'(x) | \, dx + \frac{\varepsilon\delta}{3X^2} \int_{t_\varepsilon}^{X} x^{\xi-1}\, dx +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{m} \left[\int_{\alpha_k}^{\beta_k} x^{\zeta-1}\, dx \right] \gamma^{(k)} \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon\delta}{3X^2} \cdot \frac{1}{\xi} \, [X^{\xi} - t_\varepsilon^{\xi}] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{|\zeta|} \, | \beta_k^{\zeta} - \alpha_k^{\zeta} | \, | \gamma^{(k)} | < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2X^2}{|\eta|} \sum_{k=1}^{m} | \gamma^{(k)} | = \varepsilon .$$

Ne consegue che

$$\lim_{|\eta| \to +\infty} \Psi_1(\xi + i\eta) = 0 \tag{3.4}$$

uniformemente al variare di ξ in $[\delta, 2]$.

Analogamente sia $\sigma(x)$ una funzione matrice $(n \times n)$ di elementi $\sigma_{hk}(x)$ funzioni costanti a tratti, tale che

$$| \varphi'(x) - \sigma(x) | < \frac{\varepsilon\delta}{2} \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

Si può scrivere

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{p} \nu^{(k)}(x) \qquad \text{dove} \quad \nu^{(k)}(x) = \begin{cases} \mu^{(k)} & \text{per } a_k \leq x < b_k , \\ 0 & \text{per gli altri } x, \end{cases}$$

con $\mu^{(k)}$ matrici $(\mu_{ij}^{(k)})$ costanti e con $[a_k, b_k]$ contenuti in $[0, 1]$.

Sia ξ tale che $0 \leq \xi \leq 2 - \delta$ e η tale che

$$| \eta | > \frac{4}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{p} \mu^{(k)} .$$

Per $\zeta = \xi + i\eta$ si ha:

$$\left| \int_0^1 x^{1-\zeta} \varphi'(x)\, dx \right| \leq \int_0^1 | x^{1-\zeta} | \, | \varphi'(x) - \sigma(x) | \, dx + \left| \int_0^1 x^{1-\zeta} \sigma(x)\, dx \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon\delta}{2} \int_0^1 x^{1-\xi}\, dx + \left| \sum_{k=1}^{p} \left[\int_{a_k}^{b_k} x^{1-\zeta}\, dx \right] \mu^{(k)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon\delta}{2}\int_0^1 x^{\delta-1}\,dx + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{|2-\zeta|}\,|b_k^{2-\zeta} - a_k^{2-\zeta}|\,|\mu^{(k)}| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{|\eta|}\,[|b_k^{2-\zeta}| + |a_k^{2-\zeta}|]\,|\mu^{(k)}| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{|\eta|}\,[b_k^{2-\xi} + a_k^{2-\xi}]\,|\mu^{(k)}| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{|\eta|}\cdot 2\cdot|\mu^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Pertanto

$$\lim_{|\eta|\to+\infty} \Phi_1(\xi + i\eta) = 0 \tag{3.5}$$

uniformemente al variare di ξ in $[0, 2-\delta]$.

Dimostriamo ora il Teorema I.

Sia $u(x) \in \mathcal{M}$ soluzione del sistema

$$\psi(x) + x\int_0^1 \varphi(s)\,u(sx)\,ds = 0 \tag{1.1'}$$

per $\psi(x) \equiv 0$.

Il sistema (1.1') è equivalente al sistema (1.1) (4).

Siano t e ξ_1 numeri reali tali che $t > 0$ e $0 < \xi_1 < 1$. Sia ζ un numero complesso tale che $0 < \mathcal{R}\zeta < \xi_1$. Da (1.1'), moltiplicando per $x^{\zeta-2}$ e integrando si ha:

$$\int_0^t x^{\zeta-1}\,dx\int_0^1 \varphi(s)\,u(sx)\,ds = 0 . \tag{3.6}$$

Fissato $\alpha < \xi_0$ tale che $0 < \alpha < \mathcal{R}\zeta = \xi < \xi_1$, per la ii) si ha:

$$|x^{\zeta-1}\varphi(s)\,u(sx)| \leq x^{\xi-1}\,|\varphi(s)|\,|u(sx)| \leq x^{\xi-1}\,k_\alpha\cdot s^{-\alpha}\cdot x^{-\alpha}\,|\varphi(s)| = \tag{3.7}$$

$$= k_\alpha \frac{1}{x^{1-(\xi-\alpha)}}\frac{1}{s^\alpha}\,|\varphi(s)| .$$

Essendo $1-(\xi-\alpha) < 1$ e $\alpha < 1$, la precedente disuguaglianza prova la sommabilità della funzione a I membro della (3.7) nel rettangolo Δ: $0 < x < t$, $0 < s < 1$.

(4) Pag. 3, Nota I.

Per il Teorema di Fubini, ponendo $sx = y$, si ha:

$$\int_0^1 s^{-\zeta} \varphi(s) \, ds \int_0^{st} y^{\zeta-1} u(y) \, dy = 0 . \tag{3.8}$$

Siano c_1 e c_2 costanti reali positive tali che:

$$|\varphi(s)| \leq c_1 \quad (0 \leq s \leq 1) , \qquad \left| \int_0^t x^{\zeta-1} u(x) \, dx \right| \leq c_2 \quad (t > 0) .$$

Sia ancora $\xi_1 \leq \xi_0$, essendo sempre ξ_0 il numero indicato nella ii). Si ha:

$$\left| s^{-\zeta} \varphi(s) \int_0^{st} y^{\zeta-1} u(y) \, dy \right| \leq \frac{c_1 \cdot c_{22}}{s^{\xi}} \qquad (0 < s \leq 1 \, , t > 0) .$$

Poichè la funzione a II membro è sommabile in $[0 , 1]$, e poichè

$$\lim_{t \to +\infty} s^{-\zeta} \varphi(s) \int_0^{st} y^{\zeta-1} u(y) \, dy = s^{-\zeta} \varphi(s) \int_0^{+\infty} y^{\zeta-1} u(y) \, dy ,$$

per un noto teorema di passaggio al limite sotto il segno d'integrale si ha:

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^1 s^{-\zeta} \varphi(s) \, ds \int_0^{st} y^{\zeta-1} u(y) \, dy = \int_0^1 s^{-\zeta} \varphi(s) \, ds \int_0^{+\infty} y^{\zeta-1} u(y) \, dy ,$$

per ogni $\zeta = \xi + i\eta$, tale che $0 < \xi < \xi_1$ e per ogni η. Infine, per la (3.8), si ha:

$$\int_0^1 s^{-\zeta} \varphi(s) \, ds \int_0^{+\infty} y^{\zeta-1} u(y) \, dy = 0 \qquad (\text{per } 0 < \xi < \xi_1 , \text{ e per ogni } \eta). \tag{3.9}$$

Adoperando le notazioni precedenti, dalla (3.9) si deduce che la funzione vettoriale $\int_0^{+\infty} y^{\zeta-1} u(y) \, dy$ soddisfa il sistema $\Phi(\zeta) \cdot f(\zeta) = 0$, ovvero il sistema

$$[\varphi(1) - \Phi_1(\zeta)] \cdot f(\zeta) = 0 \tag{3.10}$$

nell'incognita $f(\zeta)$. D'altra parte, per la (3.5) si ha: $\lim_{|\eta| \to \infty} [\varphi(1) - \Phi_1(\zeta)] = \varphi(1)$ uniformemente al variare di ξ in $[0 , 2 - \delta]$. Pertanto esiste $\eta_0 > 0$ tale che per $|\eta| \geq \eta_0$ e per $0 \leq \xi \leq 2 - \delta$, risulta:

$$|\det [\varphi(1) - \Phi_1(\zeta)]| > \frac{1}{2} |\det(1)| > 0 . \tag{3.11}$$

Ne consegue che la funzione $\det [\varphi(1) - \Phi_1(\zeta)]$ è priva di zeri per $|\eta| \geq \eta_0$ e $0 \leq \xi \leq 2 - \delta$. D'altra parte, poichè essa è olomorfa nel semipiano $\mathscr{R}\zeta < 2$, esiste ξ_0, $0 < \xi_0 < 2 - \delta$, tale che nel rettangolo aperto $0 < \xi < \xi_0$, $|\eta| < \eta_0$, la funzione stessa è priva di zeri. Concludendo, la funzione $\det [\varphi(1) - \Phi_1(\zeta)]$ è priva di zeri in tutta la striscia $0 < \xi < \xi_0$; di conseguenza, in tale striscia, il sistema (3.10) ha soltanto la soluzione nulla. Ma la funzione $\int_0^{+\infty} y^{\zeta-1} u(y)\, dy$, soluzione di (3.10), è olomorfa nel semipiano $\xi > 0$, quindi si può scrivere

$$\int_0^{+\infty} y^{\zeta-1} u(y)\, dy = 0 \qquad \text{per} \quad 0 < \xi < \xi_0 \quad \text{e per ogni} \quad \eta. \tag{3.12}$$

Posto $y = e^{-\tau}$, e $\omega = \log t$, si ha:

$$\int_0^{t} y^{\zeta-1} u(y)\, dy = \int_{-\omega}^{+\infty} e^{-\xi\tau} e^{-\eta\tau i} u(e^{-\tau})\, d\tau ,$$

da cui, per la (3.12)

$$\lim_{\omega \to +\infty} \int_{-\omega}^{\omega} e^{-\xi\tau} e^{-\eta\tau i} u(e^{-\tau})\, d\tau = 0, \qquad \text{per} \quad 0 < \xi < \xi_0, \ \text{e per ogni} \ \eta.$$

Ne segue, per un teorema di Offord [5], che la funzione $u(e^{-\tau})$ è identicamente nulla in $(-\infty, +\infty)$ e quindi $u(y)$ è tale in $(0, +\infty)$.

Ciò prova l'unicità della soluzione del sistema (1.1).

Per dimostrare l'esistenza della soluzione, consideriamo il sistema:

$$\Psi(\zeta) + \Phi(\zeta) g(\zeta) = 0 \tag{3.13}$$

ovvero

$$[\varphi(1) - \Phi_1(\zeta)] g(\zeta) = -\Psi_1(\zeta) , \tag{3.14}$$

nell'incognita $g(\zeta)$.

Per quanto abbiamo già osservato, esiste $\xi_0 > 0$ tale che, $\det [\varphi(1) - \Phi_1(\zeta)]$ è privo di zeri nella striscia $S: 0 < \xi < \xi_0$. In tale striscia il sistema (3.14) fornisce, per $g(\zeta)$, la seguente espressione:

$$g(\zeta) = -[\varphi(1) - \Phi_1(\zeta)]^{-1} \Psi_1(\zeta) , \tag{3.15}$$

(5) Cfr. A. C. OFFORD, *On the uniqueness of the representation of a function by a trigonometric integral*, « Proc. of London Math. Society », *42* (1937), 422–480.

con $g(\zeta)$ olomorfa in S. Se risulta $\delta < \frac{1}{2}\xi_0$, allora si ha $0 < \delta < 1$, e gli intervalli $[\delta, 2]$, $[0, 2-\delta]$, in cui sussistono rispettivamente la (3.4) e la (3.5), hanno intersezione non vuota $[\delta, 2-\delta]$. Pertanto

$$\lim_{|\eta|\to+\infty} g(\zeta) = 0$$

uniformemente al variare di $\xi = \mathscr{R}\zeta$, in $[\delta, \xi_0 - \delta]$ che è contenuto in $[\delta, 2-\delta]$. Inoltre, per la (3.4), esiste $M > 0$, tale che $|[\varphi(1) - \Phi_1(\zeta)]^{-1}| < M$, per ζ tale che $0 < \mathscr{R}\zeta < 2 - \delta$. D'altra parte, tenendo presenti le ipotesi sulla ψ, si ha, per $\mathscr{R}\zeta > 0$,

$$\Psi_1(\zeta) = -\frac{1}{\zeta}\int_0^{+\infty} x^{\zeta}\psi''(x)\,dx = \frac{1}{\zeta(\zeta+1)}\int_0^{+\infty} x^{\zeta+1}\psi'''(x)\,dx\,.$$

Pertanto, dalla (3.15) consegue:

$$|g(\xi+i\eta)| \leq M\,|\Psi_1(\xi+i\eta)| \leq M\,\frac{1}{|\eta|^2}\int_0^{+\infty} x^{\xi+1}\,|\psi'''(x)|\,dx \tag{3.16}$$

per $0 < \xi < \xi_0 < 2 - \delta$ e per ogni η. Quindi la funzione di η, $|g(\xi+i\eta)|$ è sommabile in $(-\infty, +\infty)$ per ogni ξ tale che $0 < \xi < \xi_0$; e, per un noto teorema [6], la funzione $g(\zeta)$ è, in S, la trasformata di Mellin della funzione $u(x)$, definita, per ogni $x > 0$, da:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{-(\xi+i\eta)} g(\xi+i\eta)\,d\eta \qquad (0 < \xi < \xi_0). \tag{3.17}$$

L'integrale a II membro non dipende da ξ, inoltre esso definisce una funzione della classe $\mathscr{M}$. Infatti, ponendo $\bar{u}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{-i\eta} g(\xi+i\eta)\,d\eta$, si ha $u(x) = x^{-\xi}\bar{u}(x)$, da cui risulta evidente la continuità di $u(x)$ per $x > 0$. Inoltre, se poniamo

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\xi+i\eta)|\,d\eta = k_\xi\,,$$

si ha

$$|u(x)| = x^{-\xi}\,|\bar{u}(x)| \leq x^{-\xi}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\xi+i\eta)|\,d\eta = x^{-\xi}\,k_\xi\,.$$

Pertanto la funzione $u(x)$ verifica anche la condizione ii).

(6) Cfr. Satz 2 di p. 262 in G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace Trasformation*, Band 1, Verlag Birkhäuser, Basel ,1950.

Per lo stesso teorema di cui alla nota [6], si ha poi:

$$g(\xi + i\eta) = \lim_{t\to+\infty} \int_{t^{-1}}^{t} x^{\zeta-1} u(x)\, dx \qquad (0 < \xi < \xi_0). \tag{3.18}$$

Ma essendo, per la ii), $x^{\zeta-1} u(x)$ $(0 < \xi < \xi_0)$ sommabile in $(0, +\infty)$, dalla (3.18)

$$g(\xi + i\eta) = \int_0^{+\infty} x^{\zeta-1} u(x)\, dx\,. \tag{3.19}$$

Sia ora ξ_1 un numero positivo minore sia di 1 che di ξ_0. Sostituendo, per $0 < \mathscr{R}\zeta < \xi_1$, alla $g(\zeta)$ della (3.13) l'espressione data dalla (3.19), si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} x^{\zeta-2} \psi(x)\, dx + \int_0^1 s^{-\zeta} \varphi(s) \left(\lim_{t\to+\infty} \int_0^{st} x^{\zeta-1} u(x)\, dx \right) ds = 0\,.$$

Poichè, come abbiamo già osservato, l'operazione $\lim\limits_{t\to+\infty}$ può scambiarsi con $\int_0^1 \cdots ds$, abbiamo:

$$\int_0^{+\infty} x^{\zeta-2} \psi(x)\, dx + \lim_{t\to+\infty} \int_0^1 s^{-\zeta} \varphi(s)\, ds \int_0^{st} x^{\zeta-1} u(x)\, dx = 0.$$

Ma è

$$\int_0^1 s^{-\zeta} \varphi(s)\, ds \int_0^{st} x^{\zeta-1} u(x)\, dx = \int_0^t x^{\zeta-1}\, dx \int_0^1 \varphi(s)\, u(sx)\, ds\,.$$

Quindi, per $0 < \mathscr{R}\zeta < \xi_1$, risulta:

$$\lim_{t\to+\infty} \left[\int_0^t x^{\zeta-2} \psi(x)\, dx + \int_0^t x^{\zeta-1}\, dx \int_0^1 \varphi(s)\, u(sx)\, ds \right] =$$

$$= \int_0^{+\infty} x^{\zeta-1} \left[\psi_0(x) + \int_0^1 \varphi(s)\, u(sx)\, ds \right] dx = 0\,.$$

In base allo stesso teorema di Offord secondo cui, dall'annullarsi della trasformata di Mellin di una funzione consegue l'annullarsi identico della funzione si deduce che:

$$\psi(x) + x \int_0^1 \varphi(s)\, u(sx)\, ds = 0$$

identicamente in $(0, +\infty)$, il che significa che $u(x)$ è soluzione del sistema (1.1').