
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

BIANCA ALBANESE

**Sugli insiemi di non-misurabilità secondo
Carathéodory**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 57 (1974), n.3-4, p.
156–158.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_3-4_156_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Teoria degli insiemi. — *Sugli insiemi di non-misurabilità secondo Carathéodory*^(*). Nota ^(**) di BIANCA ALBANESE, presentata dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — A general property of non-measurability subsets (according to Carathéodory measure function) of a topological space is shown.

1. È ben noto che l'insieme di non-misurabilità di un sottoinsieme di R^n , non-misurabile secondo Lebesgue, costituisce un perfetto [1].

Scopo di questa nota è quello di dimostrare come una tale proprietà, tuttavia, non dipenda né dalla particolare funzione di misura adottata, né da strutture caratteristiche di R^n .

In effetti, detta proprietà dipende da due circostanze ben poco restrittive: la prima derivante essenzialmente dall'assiomatica booleana della moderna teoria della misura, la seconda basata sulla separabilità dello spazio topologico scelto come ambiente.

Al fine di evidenziare chiaramente tutto questo, si farà qui costante riferimento ad una *qualsiasi* misura di Carathéodory, introducendo solo quando sia necessario uno spazio topologico $(S, \mathcal{C})$.

Per la nomenclatura e la simbologia, ci si uniforma (relativamente alle considerazioni sulla misura c) alla classica opera [2] di Carathéodory.

2. Premettiamo il seguente:

LEMMA 1. *Siano E, F due « somas » dei quali uno almeno non-misurabile (c). Se A, B sono due altri « somas », entrambi misurabili (c) e tali che*

$$(1) \quad E \subset A, \quad F \subset B, \quad AB = \emptyset,$$

allora $E + F$ non è misurabile (c).

Dimostrazione. Sia, per esempio, E non-misurabile (c). Esiste allora un « soma » X tale che risulti

$$(2) \quad c(X) \neq c(XE) + c(X \dot{+} XE).$$

Se si pone

$$(3) \quad Y = XA,$$

si ha, per la misurabilità (c) di A:

$$(4) \quad c(X) = c(Y) + c(X \dot{+} Y).$$

(*) Lavoro eseguito durante il godimento di una borsa di studio per l'Analisi Funzionale (C.N.R.).

(**) Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1974.

D'altro canto, sempre per la misurabilità (c) di A , riesce:

$$(5) \quad \begin{aligned} c(XE) + c(X \dot{+} XE) &= c(XE) + c[(X \dot{+} XE)A] + \\ &+ c[(X \dot{+} XE) \dot{+} (X \dot{+} XE)A] = c(YE) + c[(X \dot{+} YE)A] + \\ &+ c[(X \dot{+} XE) \dot{+} (Y \dot{+} XE)] = c(YE) + c[(X \dot{+} YE)A] + \\ &+ c[(X \dot{+} Y) \dot{+} (XE \dot{+} XE)] = c(YE) + c(Y \dot{+} YE) + c(X \dot{+} Y). \end{aligned}$$

Confrontando allora la (4) con la (5), sulla base della (2), si ottiene:

$$(6) \quad c(Y) \neq c(YE) + c(Y \dot{+} YE).$$

Ma poiché, in virtù della (3) e delle (1), risulta

$$(7) \quad c(YE) + c(Y \dot{+} YE) = c[Y(E + F)] + c[Y \dot{+} Y(E + F)],$$

dalla (6) si trae la non-misurabilità (c) di $E + F$.

Se invece E fosse misurabile (c), alla stessa conclusione si perverrebbe ragionando, come sopra, su F , ma con riferimento a B anziché ad A .

Il lemma è così dimostrato.

3. Sia ora $(S, \mathcal{C})$ uno spazio topologico e si identifichi l'insieme di tutti i « somas » con quello $\mathcal{P}(S)$ delle parti di S . Le operazioni fra tali « somas » siano quelle naturalmente indotte dall'unione e dall'intersezione di sottoinsiemi di S . (Così, per esempio, l'operazione $\dot{+}$ corrisponderà alla cosiddetta « differenza simmetrica », etc.).

Sia poi c una misura di Carathéodory avente come dominio $\mathcal{P}(S)$ e come anello di misurabilità un sottoinsieme di $\mathcal{P}(S)$ di cui facciano parte (almeno) tutti i sottoinsiemi di S costituiti da un sol punto e tutti gli intorni aperti di $\mathcal{C}$.

Ciò posto, diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1. Diremo che un punto $x \in S$ è un « punto di non-misurabilità (c) » per un insieme $E \in \mathcal{P}(S)$ se, per ogni intorno aperto I_x di detto punto, l'insieme $I_x \cap E$ riesce non-misurabile (c).

Ovviamente, soltanto gli insiemi non-misurabili (c) (se ne esistono) possono ammettere punti di non-misurabilità (c), il cui insieme sarà detto « insieme di non-misurabilità (c) » dell'insieme dato; lo si denoterà con l'apposizione dell'apice $\wedge$.

Sussiste al riguardo la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 1. Se la topologia $\mathcal{C}$ è a base numerabile, allora ogni sottoinsieme $E \subset S$ che sia non-misurabile (c) ha insieme $E^\wedge$ di non-misurabilità (c) non vuoto.

Dimostrazione. Posto che sia $E^\wedge = \emptyset$, si ricopra E mediante una famiglia $\{I_k\}_{k=1,2,\dots}$ di intorni aperti, ciascuno dei quali può supporre appartenente alla base di $\mathcal{C}$ e tale che, per ogni k , riesca misurabile (c) l'insieme $I_k \cap E$. Orbene, la successione

$$(8) \quad I_1 \cap E, (I_1 \dot{+} I_2) \cap E, \dots, (I_1 \dot{+} I_2 \dot{+} \dots \dot{+} I_n) \cap E, \dots$$

risulta monotona crescente e tutta costituita di insiemi misurabili ($\mathcal{C}$); inoltre

$$(9) \quad \lim_{n, \infty} \left(\sum_{k=1}^n \dot{+} I_k \right) E = E.$$

Ne segue che E è misurabile ($\mathcal{C}$), donde l'asserto.

Sulla base di questa proposizione e del Lemma 1, diamo allora il seguente teorema:

TEOREMA 1. - *Sotto le stesse ipotesi della Proposizione 1, l'insieme $E^\wedge$ è perfetto.*

Dimostrazione. - Cominciamo col provare che $E^\wedge$ è privo di punti isolati. Invero, se x fosse un siffatto punto, per qualche suo intorno aperto I_x l'insieme $I_x - \{x\}$ non conterrebbe punti di non-misurabilità ($\mathcal{C}$) per E . Si ricopra allora l'insieme $I_x - \{x\}$ mediante una famiglia $\{J_k\}_{k=1,2,\dots}$ di intorni aperti, ciascuno dei quali può pensarsi appartenente alla base di $\mathcal{O}$ e tale che, per ogni k , l'insieme $J_k(I_x - \{x\}) E$ riesca misurabile ($\mathcal{C}$). Ancora una volta, la successione

$$(10) \quad \left(\sum_{k=1}^n \dot{+} J_k \right) (I_x - \{x\}) E$$

risulta monotona crescente e tutta costituita di insiemi misurabili ($\mathcal{C}$); inoltre il suo limite è evidentemente l'insieme $(I_x - \{x\}) E$. Quest'insieme, pertanto, riuscirebbe misurabile ($\mathcal{C}$); ma in tal caso, dal momento che $\{x\}$ è pur esso misurabile ($\mathcal{C}$), tale risulterebbe l'insieme

$$(11) \quad (I_x - \{x\}) E + \{x\} E = I_x E,$$

contro l'ipotesi che sia $x \in E^\wedge$.

Sia ora x_0 un punto del derivato di $E^\wedge$ e si denoti con I_{x_0} un suo arbitrario intorno aperto. Si assuma poi a piacere un punto $x \in I_{x_0} E^\wedge$ ed un suo intorno aperto I_x . Necessariamente, l'insieme $I_x E$ è non-misurabile ($\mathcal{C}$); e poiché anche $I_x I_{x_0}$ è intorno aperto di x , del pari non-misurabile ($\mathcal{C}$) sarà l'insieme $I_x I_{x_0} E$. D'altronde, sia l'insieme $I_x I_{x_0}$ che l'insieme $I_{x_0} \dot{+} I_x I_{x_0}$ sono misurabili ($\mathcal{C}$) e in più

$$(12) \quad I_x I_{x_0} (I_{x_0} \dot{+} I_x I_{x_0}) = \emptyset.$$

Allora, a norma del Lemma 1, l'insieme

$$(13) \quad I_x I_{x_0} E + (I_{x_0} \dot{+} I_x I_{x_0}) E = I_{x_0} E$$

riesce non-misurabile ($\mathcal{C}$).

Sicché $x_0 \in E^\wedge$ e il teorema è dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] WILKOSZ W. (1920) - *Sugli insiemi non-misurabili (L)*, « Fund. Math. », I, 82.
- [2] CARATHÉODORY C. (1963) - *Algebraic Theory of Measure and Integration*, Chelsea Publishing Co.