
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

SUSANA ELENA TRIONE

Sopra alcune convoluzioni divergenti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 57 (1974), n.3-4, p. 143-146.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_3-4_143_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1974 (Settembre-Ottobre)

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Sopra alcune convoluzioni divergenti.* Nota (*) di
SUSANA ELENA TRIONE, presentata dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We give a sense to certain divergent convolutions of the form $(P \pm i0)^\lambda * (P \pm i0)^\mu$ (see, for the definition of these notations, formulae (2), (4), (5)).

As an application of our formulae we obtain the explicit value of a constant which appears in a formula of Fuglede (see [1], p. 7, Lemma 3.1). We observe that many of the "divergences" appearing in quantum field theory are precisely divergent convolutions of the form $(P \pm i0)^\lambda * (P \pm i0)^\mu$ (see [2], pp. 151-183).

1. Consideriamo le distribuzioni

$$(1) \quad H_\alpha(P \pm i0, n) = \frac{(P \pm i0)^{\frac{1}{2}(\alpha-n)}}{K_n(\alpha, q)},$$

dove

$$(2) \quad P = P(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+q}^2, \\ \alpha \in \mathbb{C}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Abbiamo inoltre posto

$$(3) \quad K_n(\alpha, q) = \frac{\pi^{n/2} 2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{e^{\pm(\pi/2)iq} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)},$$

$$(4) \quad (P \pm i0)^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{P \pm i\varepsilon |x|^2\}^\lambda.$$

ove

$$(5) \quad |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

e $(n-\alpha)/2$ è un intero positivo.

La distribuzione H_α è un analogo « causale » (« anticausale ») del nucleo ellittico di Marcel Riesz (cfr. [4], p. 16). Osserviamo che, a cagione della Γ

(*) Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1974.

che appare nel denominatore di (3), la funzione H_α ha poli semplici nei punti $\alpha = n + 2l$ con l intero ≥ 0 .

2. Scopo di questa nota è dare un senso alla convoluzione

$$H_\alpha(P \pm i0) * H_\beta(P \pm i0),$$

quando sia $\alpha + \beta = n + 2h$ con h intero ≥ 0 , e α, β siano punti di regolarità della distribuzione H_α .

Dalla formula (cfr. [5], formula (II, 7; II), p. 36)

$$H_\alpha * H_\beta = H_{\alpha+\beta},$$

valida per ogni $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ differenti di $n + 2r$, $r = 0, 1, 2, \dots$, si ha

$$(6) \quad H_\alpha(P \pm i0, n) * H_\beta(P \pm i0, n) = H_{\alpha+\beta}(P \pm i0, n) = \frac{(P \pm i0)^{\frac{1}{2}(\alpha-n)}}{K_n(\alpha+\beta, q)}.$$

Otteniamo, dalla (6) per $\alpha + \beta = n + 2h$, $h = 0, 1, 2, \dots$,

$$H_\alpha * H_\beta = \frac{e^{\pm(\Pi/2)qi} \Gamma(-h) (P \pm i0)^h}{\Pi^{n/2} 2^{n+2h} \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)}.$$

Sviluppiamo H_α in serie di Laurent nell'intorno del punto $\alpha = n + 2h$, $h = 0, 1, 2, \dots$:

$$H_\alpha(P \pm i0, n) = \frac{A_{-1}}{\alpha - n - 2h} + A_0 + \sum_{v=1}^{\infty} A_v (\alpha - n - 2h)^v,$$

e poniamo, come di consueto,

$$\text{Pf } H_{n+2h} \stackrel{\text{def}}{=} A_0 = \lim_{\alpha \rightarrow n+2h} \frac{d}{d\alpha} [(\alpha - n - 2h) H_\alpha].$$

Come conseguenza dalla relazione ben nota

$$\frac{\Gamma(-z+\lambda)}{\Gamma(-z)} = \frac{(-1)^\lambda \Gamma(z+1)}{\Gamma(z-\lambda+1)},$$

si perviene alla formola

$$A_0 = \lim_{\alpha \rightarrow n+2h} \frac{(-1)^{h+1} e^{\pm(\Pi/2)qi} 2}{\Pi^{n/2}} \frac{d}{d\alpha} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-2h}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}+h+1\right)}{2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} (P \pm i0)^{\frac{1}{2}(\alpha-n)} \right\}.$$

Dopo calcoli lunghi ma elementari, che omettiamo, si ricava

$$(7) \quad A_0 = \frac{(-1)^h e^{\pm(\Pi/2)qi} (P \pm i0)^h}{\Pi^{n/2} 2^{n+2h+1}} \cdot \left\{ \frac{2 \log 2 \Gamma(h+1) \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right) + \Gamma'(h+1) \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right) + \Gamma(h+1) \Gamma'\left(\frac{n+2h}{2}\right)}{\left[\Gamma(h+1) \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)\right]^2} \right\} + \\ + \frac{(-1)^{h+1} 2 e^{\pm(\Pi/2)qi}}{\Pi^{n/2} 2^{n+2h} \Gamma(h+1) \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)} (P \pm i0)^h \log (P \pm i0)^{1/2}.$$

3. Nel caso particolare $q = 0$, $p = n$, la (1) prende la forma

$$(8) \quad H_{\alpha}(|x|^2, n) \stackrel{\text{def}}{=} R_{\alpha}(x, n) = \frac{r^{\alpha-n}}{D_n(\alpha)},$$

ove

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{e} \quad D_n(\alpha) = \frac{\Pi^{n/2} 2^{\alpha} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}.$$

La (8) è, precisamente, la definizione del nucleo ellittico di M. Riesz.

4. Calcoleremo la convoluzione $R_{\alpha}(x, n) * R_{\beta}(x, n)$ quando $\alpha + \beta = n + 2h$, con h intero ≥ 0 .

Dalla formola (cfr. [4], p. 20, form. 11)

$$R_{\alpha}(x, n) * R_{\beta}(x, n) = R_{\alpha+\beta}(x, n),$$

valida per $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < n$, si ottiene formalmente

$$(9) \quad R_{\alpha} * R_{n+2h-\alpha} = \frac{r^{2h} \Gamma(-h)}{\Pi^{n/2} 2^{n+2h} \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)}.$$

Daremo un senso al secondo membro della (9) calcolando $\text{Pf } R_{\alpha}(x, n)$ nel punto $\alpha = n + 2h$.

Ricaviamo, ponendo nella (7) $q = 0$, $P \pm i0 = r^2$,

$$(10) \quad \text{Pf } R_{n+2h}(x, n) = \frac{(-1)^h r^{2h}}{\Pi^{2/n} 2^{n+2h}} \cdot \left\{ \frac{2 \log 2 \Gamma(h+1) \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)}{\left[\Gamma(h+1) \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)\right]^2} + \frac{\Gamma'(h+1) \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right) + \Gamma(h+1) \Gamma'\left(\frac{n+2h}{2}\right)}{\left[\Gamma(h+1) \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)\right]^2} \right\} + \frac{(-1)^{h+1}}{\Pi^{n/2} 2^{n+2h-1} \Gamma(h+1) \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)} r^{2h} \log r.$$

Ponendo $h = 0$ nella (10) otteniamo

$$(11) \quad \text{Pf } R_{\alpha}(x, n) = \text{Pf} \left\{ \frac{r^{\alpha-n}}{D_n(\alpha)} * \frac{r^{n-\alpha-n}}{D_n(n-\alpha)} \right\} = \frac{-1}{\Pi^{n/2} 2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \log r + \frac{1}{\Pi^{n/2} 2^{n/2}} \left[\frac{2 \log 2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) + \Gamma'(1) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) + \Gamma'\left(\frac{n}{2}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2} \right].$$

5. Come applicazione otterremo, a partire dalla (11), una formola esplicita per una costante che appare nel seguente lemma di Fuglede (cfr. [1], p. 7. Lemma 8.1):

Siano A e B due sfere concentriche di R'' , di raggi ρ (fisso) e $R > 2\rho$ rispettivamente. Allora la funzione $\varphi(x, y; R)$, $x \in A$, $y \in A$, definita

dalla formula

$$(12) \quad \frac{1}{W_n} \int_{B(R)} |x - z|^{\alpha-n} |z - y|^{-\alpha} dz = \log \frac{R}{|x - y|} + \varphi(x, y; R)$$

è continua in $A \times A$, e tende a una certa costante C , uniformemente in $A \times A$ per $R \rightarrow \infty$, ove abbiamo posto

$$W_n = \frac{2 \Pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Dalla (12), per $y = 0$, otteniamo

$$\frac{1}{W_n} \int_{B(R)} |x - z|^{\alpha-n} |z|^{-\alpha} dz = \log \frac{R}{|x|} + \varphi(x, y; R);$$

ossia

$$(13) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{W_n} \int_{B(R)} |x - z|^{\alpha-n} |z|^{-\alpha} dz - \log R \right\} = -\log |x| + C,$$

ove

$$C = \lim_{R \rightarrow \infty} \varphi(x, y; R).$$

La (13) può scriversi

$$(14) \quad \frac{1}{W_n} \text{Pf} \{ r^{\alpha-n} * r^{n-\alpha-n} \} = -\log |x| + C.$$

Se si tien conto della (11), otteniamo quindi

$$(15) \quad \frac{1}{W_n} \text{Pf} \{ r^{\alpha} * r^{n-\alpha-n} \} = -\log r + 2^{n/2} \log 2 + 2^{(n/2)-1} \Gamma'(1) + 2^{(n/2)-1} \frac{\Gamma'\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Infine, dalle (14), (15) si ricava:

$$C = 2^{n/2} \log 2 + 2^{(n/2)-1} \Gamma'(1) + 2^{(n/2)-1} \frac{\Gamma'\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] BENT FUGLEDE (1960) - *The logarithmic potential in higher dimensions*, «Math. Fys. Medd. Vid. Selsk.», 33 [1].
- [2] E. M. DE JAGER (1964) - *Applications of distributions in Mathematical Physics*, Mathematisch Centrum, Amsterdam.
- [3] I. M. GELFAND e G. E. SHILOV (1964) - *Generalized Functions*, Vol. I, Academic Press, New York.
- [4] M. RIESZ (1949) - *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, «Acta Mathematica», 81, 1-223.
- [5] S. E. TRIONE (1972) - *Tesis doctoral*, Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Buenos Aires.