ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

FERNANDO SANSÒ

**Calcolo della rototraslazione tra due sistemi di
riferimento per mezzo di punti noti parzialmente**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 57 (1974), n.1-2, p.
106–112.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_57_1-2_106_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fotogrammetria. — *Calcolo della rototraslazione tra due sistemi di riferimento per mezzo di punti noti parzialmente.* Nota (*) di FERDINANDO SANSÒ, presentata dal Socio L. SOLAINI.

SUMMARY. — In this work we deal with the problem of finding the rototranslation and the scale factor between two frames of reference (r) and (R), when only a part of the coordinates of a certain number of points r of (r) are known in (R).

The exact normal system is set up by means of quaternion algebra and then reduced to a non linear eigenvalue equation.

This equation is interpreted and its properties are studied in the last paragraph of the paper.

§ 1. Il problema risolto nel presente lavoro è il seguente: dato un certo numero di punti noti r_i in un certo sistema di riferimento (r) (sistema modello) sono note degli stessi punti un certo numero di coordinate in un altro sistema di riferimento (R) (sistema terreno); si chiede di ricavare la rototraslazione ed il fattore di scala che collegano i due sistemi (r) ed (R).

Un tale caso si presenta di frequente in fotogrammetria, quando ai punti r_i nel sistema (r) (sistema modello) corrispondono nel sistema (R) (sistema terreno) dei punti R_i di cui siano note per una parte solo le quote e per un'altra parte solo le coordinate planimetriche. Per quanto segue conviene adottare una convenzione: cioè se per un certo punto r_i sono note in (R) sia la planimetria che la quota, ripetiamo r_i due volte con diversi valori dell'indice i , in modo tale che per ogni indice i , si possa dire che, sul terreno, è nota solo la quota o solo la planimetria del punto.

In corrispondenza introduciamo le due quantità

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{se il punto è noto in planimetria} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1,1)$$

$$\beta_i = \begin{cases} 1 & \text{se il punto è noto in quota} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per quanto dato risulta ovviamente:

$$\begin{aligned} \alpha_i + \beta_i &= 1 & \alpha_i \beta_i &= 0 \\ \sum_i \alpha_i &= n_p & & \text{n. dei punti noti in planimetria} \\ \sum_i \beta_i &= n_q & & \text{n. dei punti noti in quota} \end{aligned} \quad (1,2)$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1974.

per la soluzione analitica del problema inoltre conviene usare il campo dei quaternioni, in cui i vettori 3-D vengono rappresentati come quaternioni immaginari e le rotazioni $\vec{r}' = U\vec{r}$, sono rappresentate da quaternioni q di modulo unitario per mezzo delle formule $r' = qr\bar{q}$ (1).

Per rendere più sintetica l'esposizione inoltre introduciamo i due proiettori Π_1 e Π_2 , in planimetria ed in quota, definiti da:

$$(1,3) \quad \begin{aligned} \Pi_1 r &= r_x i + r_y j = -\operatorname{Re}(ri) i - \operatorname{Re}(rj) j \\ \Pi_2 r &= r_z k = -\operatorname{Re}(rk) k. \end{aligned}$$

L'equazione di una rototraslazione in generale è:

$$(1,4) \quad R - b - \lambda qr\bar{q} = 0$$

dove b è la traslazione, q la rotazione è λ il fattore di scala.

Nel secondo caso però, a seconda del punto r_i in esame, sarà noto solo $\Pi_1 R_i$ o $\Pi_2 R_i$: perciò proiettando la (1,4) con Π_1 o con Π_2 , a seconda che R_i sia noto in planimetria od in quota, otteniamo due sistemi di equazioni

$$(1,5) \quad \Pi_1 R_i - \Pi_1 b - \lambda \Pi_1 (qr_i \bar{q}) = 0 \quad \alpha_i = 1$$

$$(1,6) \quad \Pi_2 R_i - \Pi_2 b - \lambda \Pi_2 (qr_i \bar{q}) = 0 \quad \beta_i = 1.$$

Per comodità, facciamo le seguenti convenzioni:

- l'origine del sistema (R) sia tale che

$$(1,7) \quad \begin{aligned} \sum_i \alpha_i \Pi_1 R_i &= 0 \\ \sum_i \beta_i \Pi_2 R_i &= 0 \end{aligned}$$

- i vettori r_i delle (1,5) siano riferiti al baricentro, in modo tale che

$$(1,8) \quad \sum \alpha_i r_i = 0$$

- i vettori r_i delle (1,6) siano riferiti al loro baricentro:

$$(1,9) \quad \sum_i \beta_i r_i = 0.$$

Con queste trasformazioni il sistema (r) si spezza in due sistemi (r') ed (r'') che sono semplicemente traslati tra loro: per questo motivo non ci sarà più un'unica traslazione b tra (R) ed (r) ma due traslazioni b_1 e b_2 , tra (R) ed (r') e (r'').

(1) Indichiamo con $\bar{q} = q_0 - i \vec{q}$ il quaternioni coniugato di $q = q_0 + i \vec{q}$.

Le (1,5), (1,6) vanno perciò risolte come segue:

$$(1,10) \quad \Pi_1 R_i - \Pi_1 b_1 - \lambda \Pi_1 (qr_i \bar{q}) = 0 \quad \alpha_i = 1$$

$$(1,11) \quad \Pi_2 R_i - \Pi_2 b_2 - \lambda \Pi_2 (qr_i \bar{q}) = 0 \quad \beta_i = 1.$$

Se poniamo

$$(1,12) \quad \begin{aligned} P_i &= \alpha_i \Pi_1 + \beta_i \Pi_2 \\ R_{im} &= P_i R_i \quad (\text{quantità note in (R)}) \\ b_0 &= \Pi_1 b_1 + \Pi_2 b_2 \end{aligned}$$

notando che:

$$(1,13) \quad \begin{aligned} \alpha_i P_i &= \alpha_i \Pi_1 & \beta_i P_i &= \beta_i \Pi_2 \\ \Pi_1 P_i &= \alpha_i \Pi_1 & \Pi_2 P_i &= \beta_i \Pi_2. \end{aligned}$$

Le (1,10) e (1,11) possono chiaramente essere sintetizzate nella forma:

$$(1,14) \quad R_{im} - P_i b_0 - \lambda P_i (qr_i \bar{q}) = 0.$$

Notiamo che una volta calcolati b_0 , q e λ la trasformazione di un vettore r qualsiasi in R dovrà essere eseguita nel seguente modo: riferendo r prima all'origine di (r') e poi di (r''), otteniamo due vettori r_1 ed r_2 , delle (1,10) e (1,11) poi ricaviamo:

$$(1,15) \quad R = b_0 + \lambda [\Pi_1 (qr_1 \bar{q}) + \Pi_2 (qr_2 \bar{q})].$$

§ 2. FORMAZIONE DEL SISTEMA NORMALE

Se le coordinate note in (R) superano il numero delle incognite (che è pari a 7) le (1,14) vanno trasformate in equazioni agli errori ed il sistema ottenuto va compensato col metodo dei minimi quadrati.

Pertanto posto:

$$(2,1) \quad R_{im} - P_i b_0 - \lambda P_i (qr_i \bar{q}) = v_i$$

dovremo cercare il minimo della funzione

$$(2,2) \quad \Phi = \sum_i \bar{v}_i v_i + \gamma (\bar{q}q - 1) \quad (2)$$

con la condizione

$$(2,3) \quad \bar{q}q = 1.$$

(2) γ è il moltiplicatore di Lagrange relativo alla condizione (2,3).

Notiamo che essendo P_i un proiettore, si avrà:

$$(2,4) \quad \text{Re}(\overline{P_i} u P_i v) = \text{Re}([\overline{P_i} u] v) = \text{Re}(\bar{u} P_i v)$$

per ogni coppia u, v di quaternioni immaginari:

Perciò posto:

$$u_i = R_{im} - b_0 - \lambda q r_i \bar{q}$$

si ha

$$(2,5) \quad \Phi = \text{Re}(\sum_i \bar{u}_i P_i u_i) + \gamma(\bar{q}q - 1).$$

Inoltre:

$$(2,6) \quad \delta \text{Re}(\bar{u}_i P_i u_i) = 2 \text{Re}(\delta \bar{u}_i P_i u_i).$$

Fatte queste osservazioni, imponiamo l'annullamento di $\delta\Phi$ rispetto a variazioni arbitrarie delle incognite, rispettivamente $\delta b_0, \delta\lambda$ e δq

$$(2,7) \quad - \sum_i P_i u_i = 0$$

$$(2,8) \quad \text{Re}(\sum_i q r_i \bar{q} P_i u_i) = 0$$

$$(2,9) \quad 2 \lambda \sum_i (P_i u_i) q r_i + 2 \alpha q = 0.$$

Dalla (2,7) con facili passaggi si ricava:

$$(2,10) \quad b_0 = 0.$$

Dalla (2,9) inoltre moltiplicando per $\bar{q}$ a destra, e ricordando la (2,8), troviamo:

$$(2,11) \quad \gamma = - \text{Re}(\sum_i (P_i u_i) q r_i \bar{q}) = 0.$$

Pertanto infine si ha:

$$(2,12) \quad \sum_i (P_i u_i) q r_i = \sum_i R_{im} q r_i - \lambda \sum_i (q r_i \bar{q}) q r_i = 0$$

che è un'equazione non lineare nelle sole incognite q e λ , che studieremo nel prossimo paragrafo.

Notiamo subito che se tutti i punti fossero noti sia in planimetria che in quota, si avrebbe

$$\alpha_{2i} = 1 \quad \beta_{2i+1} = 1 \quad r_{2i} = r_{2i+1} \quad R_{2im} + R_{2i+1m} = R_{2i} \quad P_{2i} + P_{2i+1} = 1$$

e quindi risulterebbe:

$$\sum_i R_{2i} q r_{2i} + \lambda (\sum_i |r_{2i}|^2) q = 0$$

che è un'equazione studiata in un precedente lavoro [5].

§ 3. STUDIO DELL'EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI

La (2,12) è un'equazione agli autovalori che per comodità d'interpretazione, trasformiamo nel seguente modo: posto

$$(3,1) \quad Q_i = I - P_i = \beta_i \Pi_1 + \alpha_i \Pi_2$$

si ha

$$(3,2) \quad \sum_i R_{im} q r_i + \lambda \sum_i Q_i (q r_i \bar{q}) q r_i + \lambda (\sum_i |r_i|^2) q = 0.$$

Questa equazione, come già visto in [5], esprime il fatto che la rotazione q cercata è quella che rende massimo il parallelismo tra i vettori $q r_i \bar{q}$ ed i vettori $R_{im} + \lambda Q_i (q r_i \bar{q})$.

In particolare, se λ' è il valore cercato della scala, si ha anche:

$$(3,3) \quad \text{Max}_q \frac{1}{\sum_i |r_i|^2} \text{Re} (\sum R_{im} q \bar{r}_i \bar{q} + \lambda' \sum_i Q_i (q r_i \bar{q}) q \bar{r}_i \bar{q}) = \lambda'.$$

Se ora scomponiamo le (3,2) nelle quattro componenti, posto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sum_i |r_i|^2} \sum_i R_{im} q r_i &\rightarrow Aq \\ \frac{1}{\sum_i |r_i|^2} \sum_i Q_i (q r_i \bar{q}) q r_i &\rightarrow B(q)q \end{aligned} \quad q = \begin{vmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{vmatrix}$$

potremmo scrivere il sistema equivalente:

$$(3,4) \quad Aq + \lambda B(q)q + \lambda q = 0.$$

Per la costruzione numerica delle matrici A e $B(q)$ si confronti [5].

Notiamo che dalla (3,3) si deduce che l'autovalore $-\lambda'$ cercato è anche l'autovalore minimo della matrice $A + \lambda' B(q)$.

Più precisamente possiamo formulare il problema come segue: consideriamo l'equazione

$$(3,5) \quad [A + \eta B(p)]q + \lambda q = 0 \quad \lambda = \lambda_{\max} \quad |p| = |q| = 1$$

la (3,5) genera una corrispondenza univoca ⁽³⁾ tra la variabili η, p ($|p| = 1$) e le variabili λ, q ($|q| = 1$)

$$(3,6) \quad \begin{aligned} \lambda &= f(\eta, p) \\ q &= u(\eta, p). \end{aligned}$$

Il nostro problema è la ricerca del punto unito delle (3,6)

$$(3,7) \quad \eta = \lambda \quad p = q.$$

(3) La matrice $A + \eta B(p)$ non è mai degenere, a meno che tutti i vettori r_i siano tra loro proporzionali, caso che escludiamo.

Osserviamo che la (3,5) resta invariata cambiando di segno a p e a q , e ciò corrisponde al fatto che q e $-q$ rappresentano la stessa rotazione: possiamo perciò introdurre una limitazione su p e q del tipo

$$\operatorname{Re} p \geq 0 \quad \operatorname{Re} q \geq 0.$$

In questo caso però q viene ad essere in corrispondenza biunivoca e continua con la sua parte immaginaria.

$$\operatorname{Im} q = \vec{q} \quad \operatorname{Re} q = \sqrt{1 - |\vec{q}|^2}$$

ed altrettanto per p .

Possiamo perciò interpretare la (3,6) come una corrispondenza univoca tra

$$\eta, \vec{p} (|\vec{p}| \leq 1) \quad \text{e} \quad \lambda, \vec{q} (|\vec{q}| \leq 1).$$

L'esistenza del punto unito di una tale trasformazione è provata dalle seguenti osservazioni:

- La (3,6) è una corrispondenza continua, perché autovalori ed autovettori di una matrice dipendono con continuità dai coefficienti di una matrice
- La (3,6) trasforma un intervallo $|\eta| \leq T$ (con T opportuno) in sé: infatti è

$$|\lambda| \leq |q^+ Aq| + |\eta| |q^+ B(p)q|$$

e posto

$$a = \operatorname{Max}_q |q^+ Aq| \quad b = \operatorname{Max}_{p,q} |q^+ B(p)q|$$

si ha

$$(3,8) \quad |\lambda| \leq a + |\eta| b.$$

Ma

$$\begin{aligned} b &= \operatorname{Max}_{p,q} |\operatorname{Re} (\sum_i Q_i (pr_i \bar{p}) qr_i \bar{q})| / |\sum_i |r_i|^2| \leq \\ &\leq \operatorname{Max}_{p,q} \sum_i |Q_i pr_i \bar{p}| |Q_i qr_i \bar{q}| / |\sum_i |r_i|^2| \leq 1 \end{aligned}$$

il segno di $=$ vale solo nel caso che gli r_i siano tutti paralleli tra loro, perciò risulta $b < 1$.

Dalla (3,8) perciò si ricava che, posto $T = a(1 - b)^{-1}$,

$$|\eta| \leq T \rightarrow |\lambda| \leq T.$$

La (3,6) è pertanto una trasformazione continua dell'insieme $J(|\vec{p}| \leq 1, |\eta| \leq T)$ in sé e poiché tale insieme è connesso, la (3,6) per il teorema di Tychonof ammette almeno un punto unito.

Notiamo che un qualsiasi valore di λ , soluzione della (3,4), deve necessariamente soddisfare la limitazione $|\lambda| \leq T$, perciò nel delimitare l'insieme J non si rischia di perdere soluzioni.

Notiamo infine che, data la continuità delle (3,6), se una successione approssimante del tipo

$$[A + \lambda_n B(q_n)] q_{n+1} + \lambda_{n+1} q_{n+1} = \quad \lambda_{n+1} = \lambda_{\max}$$

è convergente, allora converge ad una soluzione del problema (cioè ad un punto unito delle (3,6)).

BIBLIOGRAFIA

- [1] THOMPSON E. H. (1968) - *On exact linear solution of the problem of absolute orientation*, « Photogrammetria », 13 (4), 163-178.
- [2] SCHUT G. H. (1960) - *On exact linear equations for the computation of the rotational elements of absolute orientation*, « Photogrammetria », 15 (1), 34-37.
- [3] TIENSTRA J. M. (1969) - *Calculation of orthogonal matrices*. ITC Delft Series, A 48.
- [4] POPE J. A. (1970) - *An advantageous alternative parameterization of rotations for analytical photogrammetry*. ESSA Tech. Rep., C and GS 39.
- [5] SANSÒ F. (1973) - *An exact solution of the rototranslation problem*, « Photogrammetria », 29, 203-216.