Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Stefano Marchiafava, Giuliano Romani

Classi caratteristiche dei fibrati quaternionali generalizzati

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.6, p. 899–906.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_6_899_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Topologia algebrica. — *Classi caratteristiche dei fibrati quaternionali generalizzati* (*). Nota di STEFANO MARCHIAFAVA e GIULIANO ROMANI, presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY — This paper is a preliminary note of a for the coming work concerning the generalized quaternion fiber bundle characteristic ring.

Scopo di questa Nota è dare una breve illustrazione dei principali risultati che appariranno per esteso in un lavoro di prossima pubblicazione, riguardanti lo studio dei fibrati quaternionali generalizzati.

I. PRELIMINARI E RICHIAMI

1. Detto $\mathbf{Q}_n$ lo spazio quaternionale *destro* delle n-ple $(\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^n)$ di quaternioni $\xi^i \in \mathbf{Q}$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, indicheremo con GL (n), Sp (n), il gruppo lineare ed il gruppo unitario di $\mathbf{Q}_n$ (1).

Denoteremo con GL $(n)\cdot$Sp (1) il *gruppo lineare generalizzato* (2) dato dalle trasformazioni di $\mathbf{Q}_n$ della forma

$$1.1. \qquad {}'\xi^i = A^i_j \, \xi^j q \quad {}^{(3)} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

con $A = ((A^i_j))$ matrice quaternionale invertibile e q quaternione di modulo unitario. Tale gruppo è isomorfo al quoziente GL $(n) \times$ Sp $(1)/\mathbf{Z}_2$ poiché nella 1.1. A e q sono definiti a meno di un cambiamento simultaneo di segni. Il *gruppo unitario generalizzato* (2), Sp $(n)\cdot$Sp (1), ottenuto pensando nelle 1.1. A unitaria $(\bar{A}^* = A^{-1})$, corrisponde ovviamente a Sp $(n) \times$ Sp $(1)/\mathbf{Z}_2$. La trasformazione 1.1. sarà indicata anche con $\sigma_{A,q}$.

2. Una struttura, $\mathcal{Q}$, di spazio vettoriale quaternionale *destro* in uno spazio vettoriale reale $V^{\mathbf{R}}_{4n}$ di dimensione $4n$, si introduce assegnando un $\mathbf{R}$-isomorfismo $\varphi : \mathbf{Q}_n \to V^{\mathbf{R}}_{4n}$. Un altro $\mathbf{R}$-isomorfismo $\varphi' : \mathbf{Q}_n \to V^{\mathbf{R}}_{4n}$ dà in $V^{\mathbf{R}}_{4n}$ una struttura $\mathcal{Q}'$ coincidente con $\mathcal{Q}$ se e solo se $\varphi^{-1} \circ \varphi' \in$ GL (n). Se $\varphi^{-1} \circ \varphi' = \sigma_{A,q} \in$ GL $(n)\cdot$Sp (1), le due strutture $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$, che non sono allora, in generale, coincidenti, verranno dette *coerenti*. In esse la moltiplicazione, definita da φ, per un quaternione λ uguaglia quella definita da φ' per il quaternione $\lambda' = \bar{q} \lambda q$.

(*) Lavoro eseguito con contributo del CNR, nell'ambito del Gruppo Nazionale per le strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni.

(**) Nella seduta del 29 giugno 1974.

(1) Cfr. ad esempio D. Husemoller [5], pp. 67–68.

(2) Cfr. E. Martinelli [6]; J. A. Wolf [10], p. 1037.

(3) Sottointendiamo qui e nel seguito il simbolo di sommatoria rispetto agli indici ripetuti in alto e in basso.

Una famiglia di strutture quaternionali coerenti in $V_{4n}^{\mathbf{R}}$, $\{\mathcal{Q}\}$, si dice *struttura quaternionale generalizzata* (struttura q.g.) in $V_{4n}^{\mathbf{R}}$. Nel seguito ci sarà utile distinguere gli spazi vettoriali quaternionali destri da quelli sinistri. Useremo allora denotare con $V_n^{\mathbf{Q}}$ e ${}_nV^{\mathbf{Q}}$ rispettivamente quelli destri e quelli sinistri di dimensione n.

3. Siano dati $V_n^{\mathbf{Q}}$ e ${}_1V^{\mathbf{Q}}$. Il loro prodotto tensore su $\mathbf{Q}$, $V_n^{\mathbf{Q}} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} {}_1V^{\mathbf{Q}}$, è uno spazio vettoriale *reale* di dimensione $4n$. Si fissi una base $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ in $V_n^{\mathbf{Q}}$ ed una base $\boldsymbol{e}$ in ${}_1V^{\mathbf{Q}}$. Al vettore $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u} \in V_n^{\mathbf{Q}} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} {}_1V^{\mathbf{Q}}$, prodotto tensore di $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i v^i \in V_n^{\mathbf{Q}}$ per $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{e} \in {}_1V^{\mathbf{Q}}$ si associno le coordinate quaternionali $w^i = v^i u$. Essendo $V_n^{\mathbf{Q}} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} {}_1V^{\mathbf{Q}}$ generato dagli elementi del tipo $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}$, si possono estendere a tutto $V_n^{\mathbf{Q}} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} {}_1V^{\mathbf{Q}}$ tali coordinate quaternionali, che così danno luogo ad un $\mathbf{R}$–isomorfismo tra $\mathbf{Q}_n$ e $V_n^{\mathbf{Q}} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} {}_1V^{\mathbf{Q}}$; quest'ultimo risulta dotato quindi di una struttura quaternionale $\mathcal{Q}$, dipendente però dalle basi $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ ed $\boldsymbol{e}$ scelte.

Se $\boldsymbol{e}_i = {}'\boldsymbol{e}_j A_i^j$ ed $\boldsymbol{e} = q\,{}'\boldsymbol{e}$ definiscono nuove basi in $V_n^{\mathbf{Q}}$ e ${}_1V^{\mathbf{Q}}$ le nuove coordinate di $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}$, ${}'w^i = {}'v^i\,{}'u$, sono legate alle $w^j = v^j u$ dalla

3.1. $$ {}'w^i = A_j^i w^j q $$

che mostrano come cambiando basi in $V_n^{\mathbf{Q}}$ e ${}_1V^{\mathbf{Q}}$ la struttura quaternionale in $V_n^{\mathbf{Q}} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} {}_1V^{\mathbf{Q}}$ si muti in una coerente. Pertanto *allo spazio* $V_n^{\mathbf{Q}} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} {}_1V^{\mathbf{Q}}$ *rimane univocamente associata la struttura q.g. data dalla famiglia* $\{\mathcal{Q}\}$ *delle strutture quaternionali relative alle diverse scelte di basi in* $V_n^{\mathbf{Q}}$ *e* ${}_1V^{\mathbf{Q}}$.

4. Se $\mathcal{Q}$ è una struttura quaternionale in $V_{4n}^{\mathbf{R}}$ i sottospazi vettoriali $V_{4t}^{\mathbf{R}}$ $(t = 1, 2, \cdots, n)$ di $V_{4n}^{\mathbf{R}}$ immagini secondo un qualunque $\varphi : \mathbf{Q}_n \to V_{4n}^{\mathbf{R}}$, che dà la struttura $\mathcal{Q}$, dei sottospazi quaternionali di $\mathbf{Q}_n$, vengono detti *caratteristici*. I sottospazi caratteristici di dimensione reale 4 si chiamano anche *faccette caratteristiche*.

La struttura quaternionale $\mathcal{Q}$ su $V_{4n}^{\mathbf{R}}$ induce strutture quaternionali sui sottospazi caratteristici.

Se $\varphi' : \mathbf{Q}_n \to V_{4n}^{\mathbf{R}}$ definisce un'altra struttura quaternionale $\mathcal{Q}'$ coerente con $\mathcal{Q}$ allora i sottospazi caratteristici relativi alle due strutture coincidono.

L'assegnazione di una struttura q.g. su $V_{4n}^{\mathbf{R}}$ *induce una struttura q.g. per ogni sottospazio caratteristico di* $V_{4n}^{\mathbf{R}}$.

II. Fibrati quaternionali generalizzati

5. Un fibrato vettoriale reale di dimensione $4n$, $E_{4n}^{\mathbf{R}} \xrightarrow{p} X$, con gruppo strutturale $GL(n) \cdot Sp(1)$ è detto *fibrato quaternionale generalizzato* (fibrato q.g.).

Un fibrato q.g., $E_{4n}^{\mathbf{R}} \xrightarrow{p} X$, può pensarsi costruito a partire da un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di X [4] e da una famiglia di omeomorfismi

(4) Intenderemo sempre X CW–complesso, paracompatto.

$\{\varphi_\alpha / \varphi_\alpha : \underset{\alpha}{U} \times \mathbf{Q}_n \to p^{-1}(\underset{\alpha}{U})\}$. Dette $\underset{\alpha}{v^i}$ e $\underset{\beta}{v^j}$ le coordinate di uno stesso vettore di $p^{-1}(\underset{\alpha}{U} \cap \underset{\beta}{U})$ in $\underset{\alpha}{U}$ e $\underset{\beta}{U}$ rispettivamente esse sono legate da relazioni del tipo

5.1. $$\underset{\beta}{v^j} = (A_{\alpha\beta})^j_i \, \underset{\alpha}{v^i} \, q_{\alpha\beta}$$

con $A_{\alpha\beta} = (((A_{\alpha\beta})^j_i))$ matrice quaternionale invertibile e $q_{\alpha\beta}$ quaternione di modulo unitario.

Un primo esempio di fibrato q.g., dato da E. Martinelli (5), è il fibrato tangente allo spazio proiettivo quaternionale $\tau\,(\mathbf{PQ}_n)$. Altri esempi si possono avere pensando ai fibrati reali orientabili di dimensione 4 i quali, avendo come gruppo strutturale SO $(4\,,\mathbf{R})$, che come noto è isomorfo a Sp $(1)\cdot$Sp (1), vengono ad essere tutti fibrati q.g.

6. Ad ogni fibrato q.g. $E^{\mathbf{R}}_{4n} \xrightarrow{p} X$ associeremo nel seguito un fibrato q.g. di dimensione reale 4, $B_E \xrightarrow{q} X$, che diremo *fibrato di Bonan* (6) di $E^{\mathbf{R}}_{4n}$.

Il fibrato B_E si definisce prendendolo banale di fibra $\mathbf{Q}$ sugli aperti $\underset{\alpha}{U}$ ed identificando gli elementi $(\underset{\alpha}{x}\,,\underset{\alpha}{v}) \in \underset{\alpha}{U} \times \mathbf{Q}$, $(\underset{\beta}{y}\,,\underset{\beta}{v}) \in \underset{\beta}{U} \times \mathbf{Q}$ se $x = y$ e

$$\underset{\beta}{v} = \bar{q}_{\alpha\beta} \, \underset{\alpha}{v} \, q_{\alpha\beta}$$

con $q_{\alpha\beta}$ come nelle 5.1. Il fibrato di Bonan è indipendente dalle banalizzazioni $\{\underset{\alpha}{U}\,,\varphi_\alpha\}$ scelte per definirlo. Inoltre se è data un'applicazione continua $f : Y \to X$ per il fibrato di Bonan dell'indotto $f^* E^{\mathbf{R}}_{4n}$ risulta

$$B_{f^* E} = f^* B_E$$

7. Tra i sottofibrati di un fibrato q.g. $E^{\mathbf{R}}_{4n} \xrightarrow{p} X$ possono considerarsi quelli $'E^{\mathbf{R}}_{4t} \xrightarrow{p'} X$ $(1 \leq t \leq n)$ aventi come fibre sottospazi caratteristici delle fibre di $E^{\mathbf{R}}_{4n}$ che chiameremo *sottofibrati caratteristici* di $E^{\mathbf{R}}_{4n}$. Un sottofibrato caratteristico è naturalmente dotato di una struttura q.g. indotta dall'ambiente e sarà quella alla quale faremo riferimento.

Se $'E^{\mathbf{R}}_{4t} \xrightarrow{p'} X$ è un sottofibrato caratteristico di $E^{\mathbf{R}}_{4n} \xrightarrow{p} X$, facendo uso di un prodotto scalare inducente una metrica hermitiana in $E^{\mathbf{R}}_{4n}$ (7), può considerarsi il sottofibrato ortogonale di $'E^{\mathbf{R}}_{4t}$ in $E^{\mathbf{R}}_{4n}$, $''E^{\mathbf{R}}_{4(n-t)} \xrightarrow{p''} X$, anch'esso caratteristico. Il fibrato $E^{\mathbf{R}}_{4n}$ si spezza nella somma di Whitney

7.1. $$E^{\mathbf{R}}_{4n} = {'E^{\mathbf{R}}_{4t}} \oplus {''E^{\mathbf{R}}_{4(n-t)}}\,.$$

Risulta inoltre che i fibrati di Bonan di $E^{\mathbf{R}}_{4n}$ e degli addendi $'E^{\mathbf{R}}_{4t}$, $''E^{\mathbf{R}}_{4(n-t)}$, sono gli stessi

7.2. $$B_E = B_{E'} = B_{E''}\,.$$

(5) Cfr. E. Martinelli [6].
(6) Cfr. E. Bonan [1], p. 48.
(7) Riguardo alla nozione di metrica hermitiana per un fibrato q.g. vedi E. Martinelli [7].

8. Siano $E_n^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{p} X$ ed ${}_1E^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{q} X$ due fibrati quaternionali (non generalizzati) il primo destro di dimensione n, il secondo sinistro di dimensione 1. Definiamo il fibrato $E_n \otimes {}_1E \to X$ ponendo per $x \in X$

$$(E_n \otimes {}_1E)_x = (E_n^{\mathbf{Q}})_x \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} ({}_1E^{\mathbf{Q}})_x .$$

Sia $\{\underset{\alpha}{U}\}$ un ricoprimento aperto di X sul quale è definito un sistema di coordinate $\underset{\alpha}{v}^i$ per $E_n^{\mathbf{Q}}$ ed uno $\underset{\alpha}{u}$ per ${}_1E^{\mathbf{Q}}$. Siano inoltre

8.1. $$\underset{\beta}{v}^i = (A_{\alpha\beta})^i_j \underset{\alpha}{v}^j \qquad \underset{\beta}{u} = \underset{\alpha}{u}\, q_{\alpha\beta}$$

le relative funzioni di collegamento. Per ogni $\underset{\alpha}{U}$ si può allora definire come al n. 3, un sistema di coordinate $\underset{\alpha}{w}^j$ in $E_n \otimes {}_1E/\underset{\alpha}{U}$ e queste risultano collegate dalle

8.2. $$\underset{\beta}{w}^i = (A_{\alpha\beta})^i_j \underset{\alpha}{w}^j q_{\alpha\beta} .$$

Il fibrato $E_n \otimes {}_1E$ è dunque un fibrato q.g. che diremo brevemente *prodotto tensore*.

Si osservi come le matrici $A_{\alpha\beta}$ ed i quaternioni $q_{\alpha\beta}$ che compaiono nelle 8.2. siano perfettamente individuati e come in ogni punto $x \in \underset{\alpha}{U} \cap \underset{\beta}{U} \cap \underset{\gamma}{U} \neq \emptyset$ verifichino le uguaglianze

8.3. $$A_{\beta\gamma} A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\gamma} \qquad q_{\alpha\beta}\, q_{\beta\gamma} = q_{\alpha\gamma} .$$

Se si fa invece riferimento alle 5.1. che danno le funzioni di collegamento di un qualunque fibrato q.g. si nota che le matrici $A_{\alpha\beta}$ ed i quaternioni $q_{\alpha\beta}$ che vi compaiono non sono determinati in segno.

Pertanto, qualora si faccia una scelta continua di tali segni, nei punti $x \in \underset{\alpha}{U} \cap \underset{\beta}{U} \cap \underset{\gamma}{U}$ risulta in generale

$$A_{\beta\gamma} A_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\gamma} \qquad q_{\alpha\beta}\, q_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, q_{\alpha\gamma}$$

dove $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ è una funzione definita in $\underset{\alpha}{U} \cap \underset{\beta}{U} \cap \underset{\gamma}{U}$ ed a valori 1 o -1. Se, per caso, è sempre $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 1$, le matrici $A_{\alpha\beta}$ ed i quaternioni $q_{\alpha\beta}$ che si sono individuati con la scelta fatta, sono atti a definire funzioni di collegamento di due fibrati quaternionali, $E_n^{\mathbf{Q}}$ ed ${}_1E^{\mathbf{Q}}$ e risulta $E_{4n}^{\mathbf{R}} = E_n \otimes {}_1E$.

Vedremo nel seguito come però in generale non si possa fare alcuna scelta dei segni delle $A_{\alpha\beta}$ e $q_{\alpha\beta}$ che dia luogo a $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 1$ e come, in tali casi di impossibilità, ciò non dipenda dai sistemi di coordinate $\underset{\alpha}{v}^i$ considerati né dalla scelta dei segni delle $A_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ ad essi relative: cioè $E_{4n}^{\mathbf{R}}$ non potrà pensarsi in alcun modo come prodotto tensore.

9. Se si fa l'ipotesi, sul ricoprimento $\{\underset{\alpha}{U}\}$, che qualunque siano gli indici α, β, γ le intersezioni non vuote $\underset{\alpha}{U} \cap \underset{\beta}{U} \cap \underset{\gamma}{U}$ risultino connesse, allora

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ sarà costante. In tal caso $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ *è una cocatena di dimensione 2 del nervo del ricoprimento* $\{U_\alpha\}$. Nell'ulteriore ipotesi che risulti connessa ogni intersezione non vuota $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \cap U_\delta$ di quattro aperti di $\{U_\alpha\}$, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ *risulta un cociclo.*

Passando al limite diretto per raffinamenti di $\{U_\alpha\}$ risulta poi che:

9.1. PROPOSIZIONE. *Il cociclo* $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ *individua una classe di coomologia* $\varepsilon(E) \in H^2(X, \mathbf{Z}_2)$.

Tale classe, che a priori è legata alla scelta del ricoprimento $\{U_\alpha\}$ dal quale si è partiti oltre che ai sistemi di coordinate su di esso scelti, di fatto è indipendente da questi e viene così associata al solo fibrato q.g. considerato. Si dimostra che

9.2. PROPOSIZIONE. *La classe* ε *è naturale.*

Dalla definizione di $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$, 8.4., si ha subito

9.3. $$\varepsilon(E) = \varepsilon(B_E).$$

Si è implicitamente osservato che *se* $E^{\mathbf{R}}_{4n}$ *è un prodotto tensore,* $\varepsilon(E) = 0$. D'altra parte se $\varepsilon(E) = 0$ allora $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ è un cobordo. Dunque deve risultare

$$c_{\alpha\beta}\, c_{\beta\gamma}\, c_{\gamma\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

con $c_{\alpha\beta}$ cocatena di dimensione 1 a valori 1, -1.

Indicando allora con $'A_{\alpha\beta}$ e $'q_{\alpha\beta}$ l'altra scelta dei segni delle matrici e dei quaternioni che figurano nella 5.1., data dalle

$$'A_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}\, A_{\alpha\beta} \qquad 'q_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}\, q_{\alpha\beta}$$

si avrà

$$'A_{\beta\gamma}\, 'A_{\alpha\beta} = 'A_{\alpha\gamma} \qquad 'q_{\alpha\beta}\, 'q_{\beta\gamma} = 'q_{\alpha\gamma}.$$

Da ciò si conclude con la

9.4. PROPOSIZIONE. *Un fibrato q.g.* $E^{\mathbf{R}}_{4n} \xrightarrow{p} X$ *è un prodotto tensore se e solo se* $\varepsilon(E) = 0$.

III. CLASSI DI STIEFEL-WHITNEY DEI FIBRATI Q.G. PRODOTTO TENSORE

10. Denotiamo con $\eta_n(\mathbf{Q}) \to G_n(\mathbf{Q})$ il fibrato classificante dei fibrati quaternionali *destri* di dimensione n e con ${}_1\eta(\mathbf{Q}) \to {}_1G(\mathbf{Q})$ quello dei fibrati quaternionali lineari *sinistri.*

Sia $\eta_n \otimes {}_1\eta \to G_n(\mathbf{Q}) \times {}_1G(\mathbf{Q})$ il fibrato che su $(x, y) \in G_n(\mathbf{Q}) \times {}_1G(\mathbf{Q})$ ha come fibra $(\eta_n(\mathbf{Q}))_x \otimes_{\mathbf{Q}} ({}_1\eta(\mathbf{Q}))_y$.

È allora evidente che

10.1. PROPOSIZIONE. *Ogni fibrato q.g. prodotto tensore* $E_n \otimes {}_1E \to X$ *è indotto da un'applicazione di* X *nella base del fibrato* $\eta_n \otimes {}_1\eta \to G_n(\mathbf{Q}) \times {}_1G(\mathbf{Q})$.

Come immediata conseguenza della 10.1. si ha

10.2. PROPOSIZIONE. *Le uniche classi di Stiefel–Whitney eventualmente non nulle di un fibrato* q.g. *prodotto tensore sono quelle in dimensioni multiple di* 4.

Infatti

$$w_l(\eta_n \otimes {}_1\eta) \in H^l(G_n(\mathbf{Q}) \times {}_1G(\mathbf{Q}), \mathbf{Z}_2) = \bigoplus_{i+j=l} H^i(G_n(\mathbf{Q}), \mathbf{Z}_2) \otimes H^j({}_1G(\mathbf{Q}), \mathbf{Z}_2).$$

Ma è noto che $H^i(G_n(\mathbf{Q}), \mathbf{Z}_2) = 0$ se $m \not\equiv 0 \pmod 4$ (8) e quindi per la naturalità delle classi di Stiefel–Whitney la 10.2.

Facendo infine uso di uno splitting per $E_n^{\mathbf{Q}}$ si dimostra la formula seguente

10.3. $$w_{4i}(E_n \otimes {}_1E) = \sum_0^i {}_j \binom{n-i}{i-j} w_{4j}(E_n)\, w_4^{i-j}({}_1E)$$

dove a secondo membro s'intendono prodotti e potenze cup.

IV. CLASSI DI STIEFEL–WHITNEY NEI FIBRATI QUATERNIONALI GENERALIZZATI

11. Per fibrati q.g. arbitrari, non è detto che le uniche classi di Stiefel–Whitney non nulle siano in dimensioni multiple di 4. Ad esempio il classificante $\eta_4^+(\mathbf{R}) \to G_4^+(\mathbf{R})$ dei fibrati reali orientabili di dimensione 4, che come si è osservato, coincidono con i fibrati q.g. a gruppo strutturale Sp (1)·Sp (1), ha la coomologia generata da $w_2(\eta_4^+(\mathbf{R}))$, $w_3(\eta_4^+(\mathbf{R}))$, $w_4(\eta_4^+(\mathbf{R}))$ (9). Nel caso di detti fibrati $H^2(G_4^+(\mathbf{R}), \mathbf{Z}_2)$ è generato da $w_2(\eta_4^+(\mathbf{R}))$. Dato che $\varepsilon(\eta_4^+(\mathbf{R})) \in H^2(G_4^+(\mathbf{R}), \mathbf{Z}_2)$ se $\varepsilon(\eta_4^+(\mathbf{R}))$ non è nullo dovrà coincidere con $w_2(\eta_4^+(\mathbf{R}))$. Ma $\varepsilon(\eta_4^+(\mathbf{R}))$ non può essere nullo ché, per la 9.4, il fibrato $\eta_4^+(\mathbf{R})$ risulterebbe prodotto tensore e quindi, per la 10.2, dovrebbero essere nulle anche $w_2(\eta_4^+(\mathbf{R}))$ e $w_3(\eta_4^+(\mathbf{R}))$ il che appunto non avviene. Dunque intanto

$$\varepsilon(\eta_4^+(\mathbf{R})) = w_2(\eta_4^+(\mathbf{R}))$$

e da questa per la naturalità della ε, 9.2, e della w_2, segue

11.1. PROPOSIZIONE. *Se* $E_4^{\mathbf{R}} \xrightarrow{p} X$ *è un fibrato q.g. di dimensione reale* 4, $\varepsilon(E) = w_2(E)$.

Indicando poi con $\beta_2 : H^2(X, \mathbf{Z}_2) \to H^3(X, \mathbf{Z}_2)$ il morfismo di Bochstein relativo alla successione esatta corta

$$0 \to \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_4 \to \mathbf{Z}_2 \to 0$$

si ha come conseguenza della 11.1. (10)

11.2. $$w_3(E) = \beta_2(w_2(E)) = \beta_2(\varepsilon(E)).$$

(8) Cfr. ad esempio D. Husemoller [5], p. 266, per la coomologia di $G_n(\mathbf{C})$; il caso di $G_n(\mathbf{Q})$ è analogo.

(9) Vedi A. Borel [2], p. 183.

(10) Vedi E.M. Spanier [9], p. 281.

Le 11.1. e 11.2. forniscono un collegamento tra la classe ε e le w_2, w_3 di un fibrato q.g. di dimensione reale 4. Per trovare un legame tra le suddette classi in un fibrato q.g. di dimensione arbitraria e più in generale tra la ε e le w_i di tale fibrato, si può fare uso di una generalizzazione dello «splitting-principle» per fibrati quaternionali (non generalizzati).

12. Se $E^{\mathbf{R}}_{4n} \xrightarrow{p} X$ è, al solito, un fibrato q.g., nella fibra $(E^{\mathbf{R}}_{4n})_x$, $x \in X$ consideriamo la totalità PE_x, delle sue faccette caratteristiche. Si può allora dimostrare che *il fibrato* $PE \xrightarrow{q} X$ (*fibrato proiettivo associato*)), *avente come fibra su* $x \in X$, PE_x, *è un fibrato localmente banale di fibra* $\mathbf{PQ}_{n-1}$. In tal caso nel fibrato q.g. $q^*(E^{\mathbf{R}}_{4n}) \to PE$ rimane definito il sottofibrato caratteristico delle faccette caratteristiche della generica fibra date, in ogni punto di PE dal punto stesso pensato però con la struttura di spazio vettoriale. Indicato con LE tale sottofibrato caratteristico (fibrato lineare associato) avremo, (cfr. 7.1) per $'E$ opportuno fibrato q.g. $q^* E = {'E} \oplus LE$.

Con argomenti simili a quelli utilizzati nel caso quaternionale si stabilisce inoltre che il morfismo indotto q^* dalla coomologia di X alla coomologia di PE è iniettivo.

Iterando questo procedimento su $'E$ si trova che

12.1. PROPOSIZIONE. *Per il fibrato q.g.* $E \xrightarrow{p} X$ *esiste uno spazio* X' *e un'applicazione* $X' \xrightarrow{'q} X$ *per la quale il fibrato* $'q^*(E)$ *si spezza nella somma di Whitney di n fibrati q.g.* $E^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *di dimensione reale 4 con fibrati di Bonan uguali a* B_E

$$'q^*(E) = \bigoplus_{1}^{n}{}_j E^{(j)} \quad , \quad B_{E^{(j)}} = B_E \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

Inoltre l'applicazione $'q^* : H^*(X, \mathbf{Z}_2) \to H^*(X', \mathbf{Z}_2)$ *è un monomorfismo di anelli.*

Il fibrato $'q^*(E)$ *si dice uno splitting di* $E \to X$.

L'applicazione dello splitting per fibrati q.g. permette di dimostrare che

12.2. PROPOSIZIONE. *Per* $E^{\mathbf{R}}_{4n} \xrightarrow{p} X$ *fibrato q.g. qualunque sussistono le relazioni.*

$$w_2(E) = n\varepsilon(E) = nw_2(B_E) \quad , \quad w_3(E) = n\beta_2(\varepsilon(E)) = nw_3(B_E)$$

ove con β_2 *si indica il morfismo di Bochstein della* 11.2.

In particolare se n è *dispari*

$$w_2(E) = \varepsilon(E) = w_2(B_E)$$

se n è *pari*

$$w_2(E) = 0 \quad \text{e} \quad w_3(E) = 0.$$

Per la classe di Stiefel-Whitney totale dello splitting $\bigoplus_{1}^{n}{}_j E^{(j)} \to X'$ di $E \xrightarrow{p} X$ si trova

12.3. $$w(\oplus E^{(j)}) = \sum_{0}^{n}{}_i \sum_{h+k \leq n-i} \overset{(i)}{A}_{hk} \, \sigma_i(\oplus E^{(j)}) \, w_2^h(B_{\oplus E^{(j)}}) \, w_3^k(B_{\oplus E^{(j)}})$$

avendo indicato con $\sigma_i(\oplus\, E^{(j)})$ l'i–mo polinomio simmetrico elementare nelle $w_4(E^{(j)})$ e

$$\overset{(i)}{A}_{hk} = \binom{n-i}{h+k}\binom{h+k}{k}.$$

Dalle 12.3. e 12.1 si può allora trarre che

12.4. PROPOSIZIONE. *Ogni classe di Stiefel–Whitney* $w_r(E)$ *di un fibrato q.g.* $E^{\mathbf{R}}_{4n} \xrightarrow{p} X$ *può essere espressa come polinomio nelle* $w_2(B_E)$, $w_3(B_E)$, $w_{4k}(E)$, $k \leq r$ *[nelle* $w_2(E)$, $w_3(E)$, $w_{4k}(E)$ *se n è dispari]*.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BONAN (1967) – *Sur les G–Structures de type quaternionien*, «Cahiers de Topologie et géometrie differentielle», *9* (4).

[2] A. BOREL (1953) – *La cohomologie mod. 2 de certains espaces homogènes*, «Comment. Math. Helv.», *27*.

[3] A. GRAY (1969) – *A note on manifolds whose holonomy groups is a subgroup of* Sp (*n*), Sp (1), «Michigan Math. J.», *16*. Errata, «Michigan Math. J.», *17* (1970).

[4] TH. HANGAN (1968) – *Tensor product tangent bundles*, «Archiv. der Math.», *19* (4), 436–448.

[5] D. HUSEMOLLER (1966) – *Fibre bundles*, Mc–Graw Hill, New York.

[6] E. MARTINELLI (1959) – *Varietà a struttura quaternionale generalizzata*, «Atti Accad. Naz. Lincei», *26*, 353–362.

[7] E. MARTINELLI (1965) – *Metriche hermitiane sulle varietà a struttura quasi quaternionale generalizzata*, «Atti Accad. Naz. Lincei», *39*, 400–407.

[8] R. M. SZCZARBA e W. C. HSIANG (1964) – *On the tangent bundles of Grassmann Manifold*, «Amer. J. Math.», *86*, 698–704.

[9] E. H. SPANIER (1966) – *Algebraic topology*, McGraw Hill, New York.

[10] J. A. WOLF (1965) – *Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces*, «Journal of Math. and Mech.», *14* (6).