Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jean-Claude Anscombre

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.6, p. 650–656.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_6_650_0>

Algebra. — *Sur une extension du lemme de Green.* Nota di JEAN-CLAUDE ANSCOMBRE, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si introduce un'estensione della nozione d'*equivalenza di Green*, e di essa si studiano varie proprietà. L'applicazione al caso particolare del semi-gruppo degli endomorfismi di un'algebra astratta (nel senso di G. Birkhoff) $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{F})$, fa apparire l'interesse di considerare questo semi-gruppo come un sotto-semi-gruppo del semi-gruppo delle applicazioni di A in A; e ciò permette di caratterizzare i gruppi di Schutzenberger associati ad alcune classi di equivalenza.

1. RAPPELS

1.1. *Equivalences de Green.*

Etant donné un semi-groupe D quelconque, les équivalences de Green $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{L}$ attachées à D sont définies de la façon suivante:

$$a\mathfrak{R}b \Longleftrightarrow |\,a) = |\,b) \quad ; \quad a\mathfrak{L}b \Longleftrightarrow (a\,| = (b\,|$$

définitions dans lesquelles:

$$|\,a) = a \cup a\mathrm{D} \quad ; \quad (a\,| = a \cup \mathrm{D}a$$

i.e. les idéaux principaux respectivement à droite et à gauche engendrés par a élément de D. On pose en outre:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L} \quad , \quad \mathfrak{D} = \mathrm{Sup}\,(\mathfrak{R}\,,\mathfrak{L})\,.$$

On montre alors que: $\mathfrak{R}$ *et* $\mathfrak{L}$ *sont deux équivalences de* D : $\mathfrak{R}$ *est régulière à gauche,* $\mathfrak{L}$ *est régulière à droite, et* $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}\mathfrak{L}$ (*i.e.* $\mathfrak{R}$ *et* $\mathfrak{L}$ *commutent*). *De plus,* $\mathfrak{R}$ *et* $\mathfrak{L}$ *satisfont le lemme de Green* (cfr. § 2 pour l'énoncé de ce lemme).

1.2. *Une première généralisation des équivalences de Green.*

Suivant une idée de M. Crestey, on peut donner à la théorie des équivalences de Green l'aspect plus général suivant:

Soient: E un ensemble quelconque, Γ et Δ deux familles d'applications de E dans E possédant les propriétés suivantes:

(i) Γ et Δ sont stables pour la composition des applications;
(ii) L'application identique ε appartient à Δ et à Γ;
(iii) $(\forall\delta \in \Delta)\,(\forall\gamma \in \Gamma)$, $\gamma\delta = \delta\gamma$.

On introduit alors les relations de Green $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{L}$ par:

$$a\mathfrak{R}b \Longleftrightarrow \Delta a = \Delta b \quad ; \quad a\mathfrak{L}b \Longleftrightarrow \Gamma a = \Gamma b.$$

(*) Nella seduta del 15 dicembre 1973.

On pose en outre: $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$, $\mathcal{D} = \mathrm{Sup}\,(\mathcal{R}\,,\,\mathcal{L})$. On peut alors montrer que: $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{L}$ *sont deux equivalences de* E : $\mathcal{R}$ *est* Γ*–régulière,* $\mathcal{L}$ *est* Δ*–régulière, et* $\mathcal{D} = \mathcal{R}\mathcal{L}$. *De plus,* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{L}$ *satisfont encore le lemme de Green.*

2. GÉNÉRALISATION DES NOTIONS PRÉCÉDENTES

2.1. *Lemme de Green généralisé*

Nous nous proposons maintenant d'introduire une définition plus générale des équivalences de Green, telle que les deux définitions précédemment données apparaissent comme des cas particuliers de cette définition générale.

Pour ce faire, nous considérons deux ensembles E et F tels que $E \subseteq F$. Nous allons définir les *relations de Green généralisées sur* E.

DÉFINITION 2.1.1. *Étant donnés deux ensembles* E *et* F *tels que* $E \subseteq F$, *nous appellerons opérateurs de Green de* E *deux ensembles* Δ *et* Γ *d'applications de* F *dans* F, *satisfaisant aux conditions suivantes*:

(i) Δ *et* Γ *sont stables pour la composition des applications;*
(ii) *L'application identique* ε *appartient à* Δ *et à* Γ;
(iii) $(\forall \delta \in \Delta)\ (\forall \gamma \in \Gamma)\ \delta\gamma = \gamma\delta$;
(iv) $(\forall a \in F)\ (\forall \delta \in \Delta)\ (\forall \gamma \in \Gamma)$ *si* $a \in E$, si $\delta a \in E$ *et si* $\gamma a \in E$, *alors* $\delta\gamma a \in E$.

Remarquons que, contrairement aux cas précédents, les opérateurs de Δ et de Γ n'appliquent pas en général E dans E. Dans le cas particulier où $E = F$, la définition donnée ci–dessus se confond avec celle donnée en 1.2.

DÉFINITION 2.1.2. *Nous appellerons relations de Green généralisées sur* E *les deux relations* $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ *définies sur* E *comme suit*:

$$(\forall a \in E)\,(\forall b \in E) : \ a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow \Delta a = \Delta b \quad ; \quad a\mathcal{L}b \Longleftrightarrow \Gamma a = \Gamma b.$$

Nous poserons en outre:

$$\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L} \quad ; \quad \mathcal{D} = \mathrm{Sup}_E\,(\mathcal{R}\,,\,\mathcal{L}).$$

PROPOSITION 2.1.3. $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$ *sont des équivalences de* E. *Si* $a\mathcal{R}b$, *si* $\gamma \in \Gamma$ *est tel que* $\gamma a \in E$ *et* $\gamma b \in E$, *alors* $\gamma a \mathcal{R} \gamma b$ *(on a une propriété analogue pour* $\mathcal{L}$*). De plus,* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{L}$ *sont permutables, i.e.* $\mathcal{D} = \mathcal{R}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{R}$.

On peut alors montrer que $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$ possèdent la propriété remarquable suivante, en tous points analogue à la version classique du lemme de Green:

PROPOSITION 2.1.4 (*Lemme de Green généralisé*). *Soient* a *et* b *deux éléments de* E. *Si* $a\mathcal{R}b$ *(resp.* $a\mathcal{L}b$*), alors il existe deux bijections réciproques* δ_1^* *application de* $\mathcal{L}(a)$ *sur* $\mathcal{L}(b)$ *(resp.* γ_1^* *application de* $\mathcal{R}(a)$ *sur* $\mathcal{R}(b)$*) et* δ_2^* *application de* $\mathcal{L}(b)$ *sur* $\mathcal{L}(a)$ *(resp.* γ_2^* *application de* $\mathcal{R}(b)$ *sur* $\mathcal{R}(a)$*) telles que* $\delta_1^* a = b$ *(resp.* $\gamma_1^* a = b$*) et* $\delta_2^* b = a$ *(resp.* $\gamma_2^* b = a$*). Ces bijections respectent* $\mathcal{R}$ *(resp.* $\mathcal{L}$*), et par suite* δ_1^* *(resp.* γ_1^**) applique bijectivement toute* $\mathcal{H}$*–classe contenue dans* $\mathcal{L}(a)$ *(resp.* $\mathcal{R}(a)$*) sur une* $\mathcal{H}$*–classe contenue dans* $\mathcal{L}(b)$ *(resp.* $\mathcal{R}(b)$*).*

On a immédiatement les corollaires suivants:

COROLLAIRE 2.1.5. *Si a et b sont des éléments de* E *tels que* $a\mathcal{R}b$ (*resp.* $a\mathcal{L}b$), *alors*:

$$Card\,[\mathcal{H}(a)] = Card\,[\mathcal{H}(b)].$$

COROLLAIRE 2.1.6. *Si a et b, éléments de* E, *sont tels que* $a\mathcal{D}b$, *alors*:

$$Card\,[\mathcal{H}(a)] = Card\,[\mathcal{H}(b)].$$

On remarquera l'analogie avec l'expression classique du lemme de Green et de ses corollaires immédiats.

L'analogie ne s'arrête d'ailleurs pas là: à l'aide du lemme de Green généralisé, on peut étendre un grand nombre de propriétés qui reposaient sur le lemme de Green habituel, i.e. celui défini en 1.2. Nous allons voir, entre autres, que l'on peut encore parler de groupes de Schutzenberger dans le cas des équivalences de Green généralisées.

2.2. *Groupes de Schutzenberger associés aux* $\mathcal{H}$*–classes.*

Nous nous plaçons toujours dans le cadre des hypothèses du paragraphe précédent, à savoir celui des relations de Green généralisées.

Etant donnée A partie de E, nous considérerons:

$$\Delta_A = \{\delta \in \Delta : \delta A \subseteq A\} \text{ (resp. } \Gamma_A = \{\gamma \in \Gamma : \gamma A \subseteq A\});$$

Δ_A (resp. Γ_A) est un sous–demi–groupe de Δ (resp. de Γ). Nous poserons: $\overline{\delta} = \delta\,|\,A$, pour tout δ de Δ_A, avec une définition analogue pour Γ_A. Particularisons A en prenant une $\mathcal{H}$–classe de E, que nous noterons H, et désignons par L et R respectivement les $\mathcal{L}$–classe et $\mathcal{R}$–classe contenant H. Posons enfin:

$$\overline{\Delta}_H = \{\overline{\delta}\,,\,\delta \in \Delta_H\} \quad : \quad \overline{\Gamma}_H = \{\overline{\gamma}\,,\,\gamma \in \Gamma_H\}\,.$$

On montre alors que:

PROPOSITION 2.2.1. $\overline{\Delta}_H$ (*resp.* $\overline{\Gamma}_H$) *est un groupe, appelé groupe de Schutzenberger de* H *à droite* (*resp. à gauche*).

De plus, ces groupes de Schutzenberger associés aus $\mathcal{H}$–classes possèdent un certain nombre de propriétés remarquables:

PROPOSITION 2.2.2. $\overline{\Delta}_H$ (*resp.* $\overline{\Gamma}_H$) *est simplement transitif.*

PROPOSITION 2.2.3. $\overline{\Delta}_H \approx \overline{\Gamma}_H$ ($\overline{\Delta}_H$ *et* $\overline{\Gamma}_H$ *sont antimorphes*).

PROPOSITION 2.2.4. *Les deux groupes de Schutzenberger* $\overline{\Delta}_H$ *et* $\overline{\Delta}_{H'}$, *associés à deux* $\mathcal{H}$*–classes* H *et* H′ *contenues dans la même* $\mathcal{R}$*–classe sont isomorphes.*

On a un énoncé analogue pour les deux groupes de Schutzenberger $\overline{\Gamma}_H$ et $\overline{\Gamma}_{H'}$ contenues dans la même $\mathcal{L}$–classe.

COROLLARIE 2.2.5. *À deux* $\mathcal{H}$*–classes contenues dans une même* $\mathcal{D}$*–classe correspondent des groupes de Schutzenberger à droite* (*resp. à gauche*) *isomorphes.*

3. APPLICATION AU CAS DES DEMI-GROUPES

Dans tout ce qui suit, nous prendrons comme ensemble E, un sous-demi-groupe D d'un demi-groupe D^* : D^* jouera alors le rôle de F. Nous prendrons pour Δ et Γ deux ensembles de translations respectivement à droite et à gauche par des éléments de D^*, et tels qu'ils satisfassent les conditions (i), (ii), (iii), (iv). Nous appellerons de plus Δ_0 et Γ_0 les ensembles des translations respectivement à droite et à gauche par les éléments de D, $\mathfrak{R}_0$ et $\mathfrak{L}_0$ les relations de Green associées.

Rappelons que pour toute translation à droite δ et toute translation à gauche γ (par des éléments de D^*) on a:

$$\gamma\delta = \delta\gamma\,,$$

$$(\forall a \in D^*)\,(\forall b \in D^*)\;\delta(ab) = a(\delta b)\,,$$

$$(\forall a \in D^*)\,(\forall b \in D^*)\;\gamma(ab) = (\gamma a)\,b.$$

3.1. *Propriétés multiplicatives.*

PROPOSITION 3.1.1. (généralisation du théorème de Clifford-Miller). *Soient $a \in D$ et $b \in D$: pour que $ab \in \mathfrak{R}(a) \cap \mathfrak{L}(b)$ il faut et il suffit que $\mathfrak{R}(b) \cap \mathfrak{L}(a)$ contienne un idempotent. Alors*:

$$a\mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(a)\,b = \mathcal{H}(a)\,\mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(ab).$$

La Proposition 3.1.1. nous permet de caractériser les $\mathcal{H}$-classes contenant un indempotent.

PROPOSITION 3.1.2. *Toute $\mathcal{H}$-classe contenant un idempotent est un sous-groupe de* D. *C'est un sous-groupe maximal si $\Delta_0 \subseteq \Delta$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.*

COROLLAIRE 3.1.3. *Soit $a \in D$ et $b \in D$: pour que $ab \in \mathfrak{R}(a) \cap \mathfrak{L}(b)$, il faut et il suffit que $\mathfrak{R}(b) \cap \mathfrak{L}(a)$ soit un sous-groupe de* D.

Examinons encore quelques propriétés multiplicatives.

PROPOSITION 3.1.4. *Soient $a \in D$, $a' \in D$, $b \in D$, $b' \in D$ tels que: $a\mathfrak{L}a'$ et $b\mathfrak{R}b'$. Alors: $ab\mathfrak{D}a'b'$.*

PROPOSITION 3.1.5. *Pour tout $a \in D$ et pour tout $b \in D$, $\mathfrak{L}(a)\,\mathfrak{R}(b) \subseteq D(ab)$. Si $\mathfrak{L}(a) \cap \mathfrak{R}(b)$ contient un idempotent, alors l'égalité a lieu.*

Dans le cas particulier des demi-groupes, on peut préciser les propriétés des groupes de Schutzenberger associés aux H-classes.

3.2. *Groupes de Schutzenberger.*

PROPOSITION 3.2.1. *Pour une $\mathcal{H}$-classe* H *contenant un idempotent, le groupe de Schutzenberger à gauche associé à* H *est le groupe des translations à gauche de* H, *et de plus*: $\overline{\Gamma}_H \simeq H \approx \overline{\Delta}_H$.

COROLLAIRE 3.2.2. *Deux sous-groupes* $\mathcal{H}(e)$ *et* $\mathcal{H}'(e')$ *compris dans une même* $\mathcal{D}$*-classe sont isomorphes.*

Ce corollaire découle immédiatement des propositions 2.2.5 et 3.2.1.

3.3. *Eléments réguliers et éléments pseudo-réguliers.*

Rappelons qu'un élément a d'un demi-groupe S est régulier au sens de von Neumann s'il existe $a' \in S$ tel que: $a\,a'\,a = a$.

Nous allons étudier dans ce paragraphe une autre définition des éléments réguliers, faisant intervenir les opérateurs de Green tels que nous les avons définis.

DÉFINITION 3.3.1. *Un élément a de* D *sera pseudo-régulier s'il existe un élément* a' *de* D *tel que*: $aa'a \equiv a(\mathcal{H})$.

Remarquons que tout élément régulier au sens de von Neumann est pseudo-régulier. Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que $\Delta_0 \subseteq \Delta$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, on peut caractériser les éléments pseudo-réguliers de façon très précise.

PROPOSITION 3.3.2. *Si* $\Delta_0 \subseteq \Delta$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, *alors*: *pour qu'un élément a de* D *soit pseudo-régulier, il faut et il suffit que sa* $\mathcal{R}$*-classe et sa* $\mathcal{L}$*-classe contiennent chacune un idempotent.*

Le corollaire ci-après caractérise les éléments réguliers de D:

COROLLAIRE 3.3.3. *Si* $\Delta_0 \subseteq \Delta$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, *alors a est régulier si et seulement s'il est pseudo-régulier.*

Nous verrons une application de ce corollaire lorsque nous examinerons le cas particulier du semi-groupe des endomorphismes d'une algèbre universelle.

COROLLAIRE 3.3.4. *Pour que a, élément de* D, *soit régulier (au sens de von Neumann), il faut et il suffit qu'il existe* a' *élément de* D, *tel que* $a\,a'\,a\ \mathcal{H}_0\ a$.

C'est l'application du corollaire précédent au cas particulier $\Delta = \Delta_0$, $\Gamma = \Gamma_0$.

3.4. *Inverses généralisés.*

Rappelons que les éléments a et a' de D sont dits inverses généralisés si l'on a: $aa'a = a$; $a'aa' = a'$.

On a alors la proposition suivante:

PROPOSITION 3.4.1. *Si* $\Delta_0 \subseteq \Delta$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, *et si a et* a', *éléments de* D, *sont inverses généralisés, chacune des deux* $\mathcal{H}$*-classes* $\mathcal{L}(a) \cap \mathcal{R}(a')$ *et* $\mathcal{L}(a') \cap \mathcal{R}(a)$ *est un sous-groupe maximal d'élément neutre* $e = aa'$ *et* $f = a'a$ *respectivement.*

La proposition suivante permet de localiser les inverses généralisés d'un élément a de D, lorsqu'ils existent.

PROPOSITION 3.4.2. *Si un élément a de* D *est tel que sa* $\mathcal{R}$*-classe contienne un idempotent e, et sa* $\mathcal{L}$*-classe un idempotent f, alors a possède un inverse généralisé* a' *dans* $\mathcal{L}(e) \cap \mathcal{R}(f)$ *et* a' *est unique dans* $\mathcal{L}(e) \cap \mathcal{R}(f)$.

En faisant $\Delta = \Delta_0$, $\Gamma = \Gamma_0$, et en combinant la Proposition 3.3.2. et la proposition 3.4.2., on obtient la propriété bien connue:

COROLLAIRE 3.4.3. *Tout élément régulier possède au moins un inverse généralisé.*

En conclusion, il semble bien que toutes les propriétés d'un demigroupe reposant sur le lemme de Green soient susceptibles d'etre étendues à l'aide du lemme de Green généralisé.

4. CAS PARTICULIER DU DEMI-GROUPE DES ENDOMORPHISMES D'UNE ALGÈBRE ABSTRAITE

4.1. *Rappels sur les algèbres abstraites.*

Si $\mathfrak{A} = (\mathrm{A}, \mathfrak{F})$ et $\mathfrak{A}' = (\mathrm{A}, \mathfrak{F}')$ sont deux algèbres abstraites de même type, une application η de A dans A$'$ sera un *homomorphisme* de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}'$, si, pour toute f de $\mathfrak{F}$ à n variables, et pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de A^n, on a

$$\eta f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\eta x_1, \eta x_2, \cdots, \eta x_n).$$

Un *endomorphisme de* $\mathfrak{A}$ sera un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$. Nous désignerons par $\mathrm{H}(\mathfrak{A})$, le semi-groupe des endomorphismes de $\mathfrak{A}$. Si η est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}'$, l'*image* S_η de $\mathfrak{A}$ par η sera définie par

$$\mathrm{S}_\eta = \{y \in \mathfrak{A}' : (\exists x \in \mathfrak{A})\, y = \eta x\};$$

S_η est une sous-algèbre de $\mathfrak{A}'$. A l'image S_η de η, on fait correspondre dualement sa *congruence nucléaire* $\mathfrak{N}_\eta$, définie par

$$(x \equiv y\, (\mathfrak{N}_\eta)) \Longleftrightarrow (\eta x = \eta y)\,.$$

4.2. *Opérateurs de Green et relations de Green généralisées.*

Considérons l'ensemble des applications de A dans A: c'est un demi-groupe $\mathrm{D}(\mathrm{A})$; $\mathrm{H}(\mathfrak{A})$ est un sous-demi-groupe de $\mathrm{D}(\mathrm{A})$.

Définissons deux ensembles Δ et Γ d'opérateurs de Green pour $\mathrm{D}(\mathrm{A})$.

Pour ce faire, considérons les deux ensembles des translations respectivement à droite et à gauche par les éléments de $\mathrm{D}(\mathrm{A})$; on a la proposition suivante:

PROPOSITION 4.2.1. *Soit* $\mathfrak{A} = (\mathrm{A}, \mathfrak{F})$ *une algèbre abstraite,* $\mathrm{H}(\mathfrak{A})$ *le demi-groupe des endomorphismes de* $\mathfrak{A}$, $\mathrm{D}(\mathrm{A})$ *le demi-groupe des applications de A dans A. L'ensemble des translations respectivement à droite et à gauche par* $\mathrm{D}(\mathrm{A})$ *constitue un couple de Green pour* $\mathrm{H}(\mathfrak{A})$.

Cherchons à caractériser alors les équivalences de Green généralisées associées à ce couple d'opérateurs.

PROPOSITION 4.2.2. *Sur* $H(\mathfrak{A})$, *on a*:

$$\eta \mathcal{R}_0 \xi \Longleftrightarrow |\eta) = |\xi) \quad ; \quad \eta \mathcal{L}_0 \xi \Longleftrightarrow (\eta| = (\xi|$$
$$\eta \mathcal{R} \xi \Longleftrightarrow S_\eta = S_\xi \quad ; \quad \eta \mathcal{L} \xi \Longleftrightarrow \mathfrak{N}_\eta = \mathfrak{N}_\xi .$$

De l'étude générale, on déduit que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ commutent, et que d'autre part elles vérifient le lemme de Green généralisé ainsi que ses conséquences; entre autres:

PROPOSITION 4.2.3. *Un endomorphisme* η *de* $\mathfrak{A}$ *est régulier si et seulement s'il existe un endomorphisme* ξ *de* $\mathfrak{A}$ *tel que*:

$$S_{\eta\xi\eta} = S_\eta \quad ; \quad \mathfrak{N}_{\eta\xi\eta} = \mathfrak{N}_\eta .$$

PROPOSITION 4.2.4.

$$\psi' \cap \psi'' = \mathfrak{D}_0(\Omega)$$

avec $(\eta \in \psi') \Longleftrightarrow ((\exists \omega \in \Omega)\, \mathfrak{N}_\eta = \mathfrak{N}_\omega)$, $(\eta \in \psi'') \Longleftrightarrow ((\exists \omega \in \Omega)\, S_\eta = S_\omega)$. ψ' et ψ'' sont donc respectivement l'ensemble des vectoriels à droite et l'ensemble des vectoriels à gauche.

PROPOSITION 4.2.5. *Pour que* $\eta\xi$ *appartienne à* $\mathcal{R}(\eta) \cap \mathcal{L}(\xi)$, *il faut et il suffit que*:

$$\mathfrak{N}_\eta \,|\, S_\xi = \mathcal{E} \,|\, S_\xi \quad ; \quad \mathfrak{N}_\eta(S_\xi) = \mathfrak{A} .$$

COROLLAIRE 4.2.6. *Pour que* $\eta\xi$ *soit un automorphisme de* $\mathfrak{A}$, *il faut et il suffit que* η *soit surjectif*, ξ *injectif*, *et que l'on ait*:

$$\mathfrak{N}_\eta(S_\xi) = \mathfrak{A} \quad ; \quad \mathfrak{N}_\eta \,|\, S_\xi = \mathcal{E} \,|\, S_\xi .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. C. ANSCOMBRE, *Une extension du lemme de Green et ses applications*, Conférence présentée au Séminaire Dubreil, Paris, 24 Avril 1972.

[2] J. C. ANSCOMBRE, *Un problème de dualisation dans les algèbres abstraites et les endomorphismes décomposants*, Séminaire Dubreil–Pisot: Algèbre et théorie des nombres, 24e année, 1970–1971, n. 14, 18 p.

[3] A. H. CLIFFORD and J. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*, Volume 1. Providence, American mathematical Society, 1961 «Mathematical Surveys», 7.

[4] P. M. COHN, *Universal algebra*. New York, Harper and Row, 1965 Harper international student reprint.

[5] R. CROISOT, *Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples*, « Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. », 3ème sér., *70*, 361–379 (1953).

[6] P. DUBREIL, *Théorie des demi-groupes*, Cours de D.E.A. Paris, 1967–68 (non publié).

[7] P. DUBREIL, *Endomorphismes*, Séminaire Dubreil–Pisot: Algèbre et théorie des nombres, 18e année, 1964/65, n. 23, 20 p.

[8] P. DUBREIL, *Sur le demi-groupe des endomorphismes d'une algèbre abstraite*, « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. », ser. VIII, *46*, 149–153 (1969).

[9] P. DUBREIL, *Endomorphismes d'une algèbre universelle*, Cours à l'Université de Rome, Janvier–Février 1969.

[10] G. GRÄTZER, *Universal algebra*. Princeton, D. Van Nostrand Company, 1968. University series in higher mathematics.

[11] E. S. LJAPIN, *Semi-groups*, Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1963, « Translations of Mathematical Monographs », *3*.