Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jeno Szèp, Guido Zappa

Generalizzazione di un teorema di Gaschütz sui sylowizzatori

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.3-4, p. 167–171.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_3-4_167_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Algebra. — *Generalizzazione di un teorema di Gaschütz sui sylowizzatori.* Nota [(*)] di JENO SZÈP e GUIDO ZAPPA [(**)], presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — The concepts of T-relation, of absolute and relative ρ-complement (ρ being a T-relation) are introduced for a finite group G. A necessary and sufficient condition for the conjugacy of the relative ρ-complements of a subgroup of G is given. This result generalizes a theorem of Gaschütz.

In un recente lavoro, W. Gaschütz ([1]) ha chiamato sylowizzatore di un p–sottogruppo R di un gruppo finito G un sottogruppo S di G tale che R sia un p–sottogruppo di Sylow di S e S sia massimale rispetto a questa condizione. Dopo aver fornito un esempio, dovuto ad Isaacs, di un gruppo finito G contenente un p–sottogruppo R i cui sylowizzatori non sono coniugati, il Gaschütz ha dato due notevoli criteri affinché i sylowizzatori di un p–sottogruppo siano coniugati. Precisamente, il primo di questi criteri asserisce che se G è un gruppo finito risolubile, P un suo sottogruppo di Sylow, e R un sottogruppo normale di P, i sylowizzatori di R sono coniugati. Nei gruppi finiti risolubili, un sylowizzatore di un p–sottogruppo R è della forma RC, con C sottogruppo di R d'ordine primo con p. Il sottogruppo C è cioè un complemento di R nel sylowizzatore. Gaschütz ha posto il problema di fornire criteri affinché detti complementi siano coniugati.

Il presente lavoro mira a generalizzare in varie direzioni il primo criterio di Gaschütz. Si introduce il concetto di T–relazione tra π–sottogruppi e π'–sottogruppi di un gruppo finito G (π essendo un insieme di primi, π' il complementare), indicando con tal nome una relazione ρ che si conservi per coniugio e tale che se è $R\rho C_1$, $R\rho C_2$ e se C_1, C_2 sono contenuti in uno stesso π'–sottogruppo, sia anche $R\rho\langle C_1, C_2\rangle$. Nel caso di Gaschütz π consta di un solo numero primo, e la ρ si riduce alla permutabilità.

Se ρ è una T–relazione, abbiamo chiamato π–complemento assoluto di un π–sottogruppo R di G un π'–sottogruppo C tale che valga $R\rho C$, e tale che C sia massimale rispetto a questa condizione. Se H è un π'–sottogruppo di Hall di G, abbiamo chiamato ρ–complemento relativo di R in H un sottogruppo C di H tale che valga $R\rho C$ e tale che C sia massimale (tra i sottogruppi di H) rispetto a questa condizione. Nelle ipotesi del teorema di Gaschütz, vengono ad essere coniugati non solo i complementi assoluti, ma anche quelli relativi.

(*) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1973.
(**) Il contributo del secondo Autore rientra nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

Supponendo che il gruppo G verifichi la $D_{\pi'}$ di P. Hall (condizione sicuramente soddisfatta per i gruppi risolubili) abbiamo fornito una condizione necessaria e sufficiente affinché i ρ–complementi relativi di un π–sottogruppo R di G, contenuto in un π–sottogruppo di Hall P, siano coniugati rispetto a P (e siano quindi ρ–complementi assoluti) (Teorema 3). Come caso particolare di questo teorema si ritrova il criterio di Gaschütz.

1. In tutto il corso di questa Nota, π indicherà un insieme di numeri primi e π' l'insieme complementare di π rispetto all'insieme di tutti i numeri primi.

Ricordiamo che si dice che un gruppo finito G verifica la condizione D_π se G possiede almeno un π–sottogruppo di Hall H e se ogni π–sottogruppo di G è contenuto in almeno un coniugato di H.

Se G è un gruppo finito, una relazione ρ tra π–sottogruppi e π'–sottogruppi di G è chiamata una *T–relazione* se: 1) Da $a \in G$ e $R\rho C$ (con R π–sottogruppo e C π'–sottogruppo di G) segue $(a^{-1} Ra) \rho (a^{-1} Ca)$; 2) Se R è un π–sottogruppo, e se $C_1, C_2, \langle C_1, C_2 \rangle$ sono π–'sottogruppi di G, da $R\rho C_1$ e $R\rho C_2$ segue $R\rho \langle C_1, C_2 \rangle$.

Sia ora G un gruppo finito, ρ una T–relazione definita in G, R un π–sottogruppo di G. Un sottogruppo C di G è chiamato un *ρ–complemento assoluto* di R se: 1) C è un π'–sottogruppo; 2) vale $R\rho C$; 3) C è massimale rispetto alle condizioni 1) e 2) (cioè non esiste alcun π'–sottogruppo $D \neq C$ tale che $C \subseteq D$ e $R\rho D$).

Sia ora H un π'–sottogruppo di Hall di G. Allora un sottogruppo C di G è chiamato un *ρ–complemento relativo* di R in H se: 1) $C \subseteq H$; 2) vale $R\rho C$; 3) C è massimale rispetto alle condizioni 1) e 2).

OSSERVAZIONE 1. *Se* R *è un π–sottogruppo di* G , C *un ρ–complemento assoluto di* R , H *un π'–sottogruppo di Hall di* G *e se* $C \subseteq H$, C *è anche un ρ–complemento relativo di* R *in* H.

OSSERVAZIONE 2. *Se* R *è un π–sottogruppo di* G, *e* H *un π'–sottogruppo di Hall di* G, *e se esiste almeno un sottogruppo* $X \subseteq H$ *per cui valga* $R\rho X$, *esiste uno e un solo ρ–complemento relativo di* R *in* H.

Sia infatti Σ l'insieme dei sottogruppi X di H per cui valga $R\rho X$. Allora, se $X_1, X_2 \in \Sigma$ segue dalla definizione di T–relazione che $\langle X_1, X_2 \rangle \in \Sigma$. Pertanto se Σ non è vuoto, esso ammette un unico elemento massimale, unione di tutti i sottogruppi di $X \in \Sigma$, che risulta essere l'unico ρ–complemento relativo di R in H.

ESEMPI DI T–RELAZIONI

ρ_1: è $R\rho_1 C$ se C è permutabile con R;

ρ_2: è $R\rho_2 C$ se C è permutabile con ogni elemento di R;

ρ_3: è $R\rho_3 C$ se ogni elemento di C è permutabile con R;

ρ_4: è $R\rho_4 C$ se ogni elemento di C è permutabile con ogni elemento di R.

TEOREMA 3. *Sia* G *un gruppo finito verificante* $D_{\pi'}$, *sia* P *un* π–*sottogruppo di Hall di* G, *e sia* R *un sottogruppo di* P. *Sia* ρ *una* T–*relazione tra* π–*sottogruppi e* π'–*sottogruppi di* G, *e sia* C *un* ρ–*complemento assoluto di* R *di massimo ordine. Allora, condizione necessaria e sufficiente affinché i* ρ–*complementi relativi di* R (*nei vari* π'–*sottogruppi di Hall di* G) *siano tutti e soli i coniugati di* C *rispetto a* P (*e siano quindi tutti* ρ–*complementi assoluti di* C) *è che, per ogni* $a \in P$, *valga* $(a^{-1} Ra)\, \rho C$.

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Sia infatti a un qualunque elemento di P. Allora aCa^{-1}, quale coniugato di C rispetto a P, è per ipotesi un ρ–complemento relativo di R (in un conveniente π'–sottogruppo di Hall di G), onde vale $R\rho\,(aCa^{-1})$. Essendo ρ una T–relazione, si ha allora $(a^{-1} Ra)$ ρC, come si voleva.

La condizione è sufficiente. Sia, per ipotesi, $(a^{-1} Ra)\, \rho C$ per ogni $a \in P$. Proviamo anzitutto che, per ogni $a \in P$, aCa^{-1} è un ρ–complemento relativo di R (in un conveniente π'–sottogruppo di Hall di G). Valendo $(a^{-1} Ra)\, \rho C$, ed essendo ρ una T–relazione vale anche $R\rho\,(aCa^{-1})$. Poiché in G vale $D_{\pi'}$, esiste un π'–sottogruppo di Hall H di G contenente C, onde $aCa^{-1} \subseteq aHa^{-1}$, con aHa^{-1} π'–sottogruppo di Hall di G. In base all'Osservazione 2, esiste uno ed un solo ρ–complemento relativo di R in aHa^{-1}: sia esso $\bar{C}$; e si ha $aCa^{-1} \subseteq \bar{C}$. A sua volta, $\bar{C}$ è contenuto in un ρ–complemento assoluto $\bar{\bar{C}}$ di R. Ne segue $|aCa^{-1}| \leq |\bar{C}| \leq |\bar{\bar{C}}|$, e poiché $|C| = |aCa^{-1}|$, si ha $|C| \leq |\bar{C}| \leq |\bar{\bar{C}}|$. Ma essendo per ipotesi C un ρ–complemento assoluto di R di massimo ordine, è $|\bar{\bar{C}}| \leq |C|$, donde segue $|C| = |\bar{C}| = |\bar{\bar{C}}|$, e quindi $|aCa^{-1}| = |\bar{C}| = |\bar{\bar{C}}|$. Avendosi $aCa^{-1} \subseteq \bar{C} \subseteq \bar{\bar{C}}$, si ha $aCa^{-1} = \bar{C} = \bar{\bar{C}}$. Ma aCa^{-1} è un qualunque coniugato di C rispetto a P, onde ogni coniugato di C rispetto a P è un ρ–complemento assoluto di R, quindi, per l'Osservazione 1, anche un ρ complemento relativo in ogni π'–sottogruppo di Hall di G che lo contenga.

Dobbiamo ora mostrare che, viceversa, se $\bar{C}$ è un ρ–complemento relativo di R in un π'–sottogruppo di Hall $\bar{H}$ di G, $\bar{C}$ è coniugato di C rispetto a P. Poiché in G vale $D_{\pi'}$, si ha $C \subseteq d^{-1} \bar{H} d$, con d conveniente elemento di G. Posto $H = d^{-1} \bar{H} d$, si ha che H è un π'–sottogruppo di Hall di G, onde $G = PH$, e pertanto $d = ab$ con $a \in P$, $b \in H$. Allora si ha $\bar{H} = dHd^{-1} = abHb^{-1}a^{-1} = aHa^{-1}$ cioè $H = a^{-1} \bar{H} a$, con $a \in P$. Ma $C \subseteq H = a^{-1} \bar{H} a$, cioè $aCa^{-1} \subseteq \bar{H}$. Essendo $a \in P$, si ha per ipotesi $(a^{-1} Ra)\, \rho C$, quindi, essendo ρ una T–relazione, $R\rho\,(aCa^{-1})$. Essendo $aCa^{-1} \subseteq \bar{H}$, ed essendo, $\bar{C}$, in base all'Osservazione 2, l'unico ρ–complemento relativo di R in $\bar{H}$, si ha $aCa^{-1} \subseteq \bar{C}$, onde $|aCa^{-1}| \leq |\bar{C}|$, cioè $|C| \leq |\bar{C}|$. A sua volta, $\bar{C}$ è contenuto in un ρ–complemento assoluto $\bar{\bar{C}}$ di R, onde $|C| \leq |\bar{C}| \leq |\bar{\bar{C}}|$. Ma si ha anche $|\bar{\bar{C}}| \leq |C|$ perché per ipotesi C è un ρ–complemento assoluto di R di massimo ordine, onde $|C| = |\bar{\bar{C}}|$, cioè $|aCa^{-1}| = |C| = |\bar{C}| = |\bar{\bar{C}}|$, e poiché $aCa^{-1} \subseteq \bar{C} \subseteq \bar{\bar{C}}$, segue $aCa^{-1} = \bar{C} = \bar{\bar{C}}$. Pertanto $\bar{C}$ è coniugato di C rispetto a P. Il teorema è così completamente provato.

COROLLARIO 4. *Sia* G *un gruppo finito verificante* $D_{\pi'}$, *sia* P *un* π*–sottogruppo di Hall di* G, *e sia* R *un sottogruppo di* P *normale in esso. Sia* ρ *una* T*–relazione tra* π*–sottogruppi e* π'*–sottogruppi. Allora i* ρ*–complementi relativi di* R (*nei vari* π'*–sottogruppi di Hall di* G) *sono coniugati rispetto a* P (*e sono quindi* ρ*–complementi assoluti*).

Dimostrazione. Sia C un ρ–complemento assoluto di R di massimo ordine (la cui esistenza è assicurata, una volta supposta l'esistenza di ρ–complementi relativi). Allora vale $R\rho C$, onde, per ogni $a \in P$, essendo R normale in P, cioè $a^{-1}Ra = R$, si ha $(a^{-1} Ra)\rho C$. In base al Teorema 3, tutti i ρ–complementi relativi di R (nei vari π'–sottogruppi di Hall di G) sono coniugati a C (quindi anche tra loro) rispetto a P, e sono ρ–complementi assoluti di R.

2. Portiamo ora l'attenzione sul caso in cui la T–relazione considerata è la relazione che abbiamo indicato con ρ_1: $R\rho_1 C$ se e solo se R è permutabile con C.

Sia G un gruppo finito, e R un π–sottogruppo di G. Diremo π*–sylowizzatore* di R un sottogruppo S di G tale che: 1) R è un π–sottogruppo di Hall di S; 2) S è massimale rispetto alla condizione 1). Se π consta di un solo numero primo p, il concetto di π–sylowizzatore si riduce a quello di sylowizzatore introdotto da Gaschütz ([1]).

Si ha subito che:

PROPOSIZIONE 5. *Sia* G *un gruppo finito tale che ogni suo sottogruppo verifichi* $D_{\pi'}$. *Sia* R *un* π*–sottogruppo di* G. *Allora* S *è un* π*–sylowizzatore di* R *se e solo se* $S = RC$ *con* C ρ_1*–complemento assoluto di* R.

Dimostrazione. Sia C un ρ_1–complemento assoluto di R. Allora vale $R\rho_1 C$, cioè R e C sono permutabili, ossia RC è un sottogruppo di G. Poiché R è un π–gruppo e C un π'–gruppo, si ha che R è un π–sottogruppo di Hall di RC. Proviamo ora che RC è un π–sylowizzatore di R. Se non lo fosse, esisterebbe un sottogruppo S di G tale che $RC \subseteq S$, $RC \neq S$, con R π–sottogruppo di Hall di S. Poiché S per ipotesi verifica $D_{\pi'}$, C è contenuto in un π'–sottogruppo di Hall $\bar{C}$ di S, e si ha $S = R\bar{C}$, cioè vale $R\rho_1 \bar{C}$. Non può essere $C = \bar{C}$, altrimenti si avrebbe $RC = R\bar{C} = S$. È quindi $C \subseteq \bar{C}$, $C \neq \bar{C}$, il che è assurdo, visto che C è un ρ_1–complemento assoluto di R, cioè è massimale nell'insieme dei π'–sottogruppi X di G tali che valga $R\rho_1 X$. Resta così provato che RC è un π–sylowizzatore di R.

Viceversa, sia S un π–sylowizzatore di R. Poiché S verifica $D_{\pi'}$, S ammette un π'–sottogruppo di Hall C. Ma R è per ipotesi un π–sottogruppo di Hall di S, quindi $S = RC$. Vale allora $R\rho_1 C$. Proviano ora che C è un ρ_1–complemento assoluto di R. Se non lo fosse, C sarebbe contenuto propriamente in un ρ_1–complemento assoluto $\bar{C}$ di R. Allora varrebbe $R\rho_1 \bar{C}$ cioè $\bar{C}$ sarebbe permutabile con R, ossia $R\bar{C}$ sarebbe un sottogruppo tale che $S = RC \subseteq R\bar{C}$, $S \neq R\bar{C}$, e R sarebbe un π–sottogruppo di Hall di $R\bar{C}$, contro l'ipotesi che S è un π–sylowizzatore di R. Ne segue che C è un ρ_1–complemento di R, come si voleva.

TEOREMA 6. *Sia* G *un gruppo finito tale che ogni suo sottogruppo verifichi* $D_{\pi'}$. *Sia* P *un* π*–sottogruppo di Hall di* G *e* R *un sottogruppo di* P *normale in esso. Allora i* π*–sylowizzatori di* R *sono coniugati rispetto a* P.

Dimostrazione. Siano S_1 e S_2 due π–sylowizzatori di R. Allora, per la Proposizione 5, è $S_1 = RC_1$, $S_2 = RC_2$, con C_1, C_2 ρ_1–complementi assoluti di R. In base al Corollario 4, essendo ρ_1 una T–relazione, esiste un $a \in P$ tale che $a^{-1} C_1 a = C_2$. Ne segue $a^{-1} S_1 a = a^{-1} RC_1 a = (a^{-1} Ra)(a^{-1} C_1 a) = RC_2 = S_2$, onde S_1 ed S_2 sono coniugati rispetto a P.

In particolare, la tesi del Teorema 6 è vera quando G è risolubile, poiché allora ogni sottogruppo di G è risolubile e quindi verifica $D_{\pi'}$ (Teorema di P. Hall). Se si suppone inoltre che π consti di un solo numero primo, si ottiene il Teorema 1 di Gaschütz ([1]).

BIBLIOGRAFIA

[1] W. GASCHÜTZ, *Sylowisatoren*, «Mathem. Zeitschr.», *122*, 319–320 (1971).