
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

FRANCESCA ACQUISTAPACE, FABRIZIO BROGLIA,
ALBERTO TOGNOLI

**Sull'insieme di non coerenza di un insieme analitico
reale**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 55 (1973), n.1-2, p. 42-45.*
Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_1-2_42_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_1-2_42_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Sull'insieme di non coerenza di un insieme analitico reale* (*). Nota (**) di FRANCESCA ACQUISTAPACE, FABRIZIO BROGLIA e ALBERTO TOGNOLI, presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this short paper we show that the set of points in which a real analytic space is not coherent may be not analytic. (In [2] it is proved that it is always semianalytic).

Dato un insieme analitico reale X definito in $\mathbf{R}^n$ ricordiamo che un suo punto si dice di non coerenza se ivi il fascio $\mathfrak{I}_X$ delle funzioni analitiche reali nulle su X non è coerente come ${}_n\mathfrak{O}$ modulo, ove ${}_n\mathfrak{O}$ è il fascio delle funzioni analitiche reali su $\mathbf{R}^n$.

Per un insieme analitico (definito da equazioni globali), Fensch in [1] ha dimostrato che l'insieme dei punti di non coerenza ha codimensione almeno 2.

Vogliamo dare un esempio che mostra come tale insieme possa non essere analitico.

Faremo uso a tal fine del seguente Lemma (dimostrato in [4], p. 209).

LEMMA. Sia X uno spazio analitico reale, X_x il germe individuato da X in x ed $\tilde{X}_x$ il suo complessificato.

Se X_x è irriducibile X è coerente nel punto x se, e solo se, è verificata la seguente condizione: esiste un intorno U di x in X tale che

$$(\alpha) \quad y \in U \Rightarrow \dim X_y = \dim X_x$$

(β) esiste un rappresentante $\tilde{X}'$ di $\tilde{X}_x$ tale che per ogni $y \in U$ il numero delle componenti irriducibili di X_y è uguale a quello delle componenti irriducibili di $\tilde{X}'_y$.

Se $X_x = \bigcup_{i=1}^p X_x^i$ non è irriducibile, X è coerente se e solo se la condizione è verificata per ogni X_x^i .

Sia X l'ipersuperficie di $\mathbf{R}^4$ definita dall'equazione

$$(1) \quad \varphi = x^3 - x^2 wz - wy^2 = 0.$$

Le sezioni X_c di X con gli iperpiani di equazione $z = c$ sono coni di vertice il punto $(0, 0, 0, c)$ e di base la cubica di equazione

$$(2) \quad x^3 - cx^2 - y^2 = 0$$

del piano

$$\begin{cases} z = c \\ w = 1. \end{cases}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1973.

La cubica (2) ha un punto doppio nodale per $c < 0$, una cuspidale per $c = 0$, un punto doppio isolato per $c > 0$.

Quindi gli spazi analitici X_c sono coerenti per $c \leq 0$ mentre, se $c > 0$, X_c ha come unico punto di non coerenza il vertice $(0, 0, 0, c)$ (X_c non è altro che l'«ombrello di Cartan» vedi [3]).

Il luogo dei punti singolari di X si ottiene resolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2 - 2wzx = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2wy = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial w} = -x^2z - y^2 = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -x^2w = 0. \end{cases}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{cases} w = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

Il luogo singolare è pertanto il piano π di equazioni $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

$\pi \cap X_c$ è per ogni $c \leq 0$ la generatrice doppia di X_c (quella che passa per il punto doppio di (2)), mentre per $c > 0$ è la retta che costituisce il «manico» di X_c .

Il luogo dei vertici dei coni X_c è la retta $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{cases}$ del piano π .

Lo spazio X , che ha dimensione 3, contiene dunque un «manico» di dimensione 2, precisamente il semipiano $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z > 0 \end{cases}$.

Cerchiamo di parametrizzare X . Consideriamo l'insieme analitico complesso $\tilde{X}$ di equazione (1) in $\mathbf{C}^4$ e le cubiche complesse di equazione (2). Indichiamo con $\tilde{X}_c$ i coni relativi. Una parametrizzazione per la cubica complessa (2) è data da:

$$\begin{cases} x = t^2 + c \\ y = t(t^2 + c). \end{cases}$$

Per il cono $\tilde{X}_c$ si ottiene quindi la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = u(t^2 + c) \\ y = ut(t^2 + c) \\ w = u. \end{cases}$$

Otteniamo infine per $\tilde{X}$ la parametrizzazione

$$(3) \quad \begin{cases} x = u(t^2 + c) \\ y = ut(t^2 + c) \\ w = u \\ z = c \end{cases} \quad \text{con parametri } u, t, c.$$

L'esistenza della parametrizzazione prova che $\tilde{X}$ è globalmente irriducibile.

Dal punto di vista reale la (3) è una parametrizzazione dell'insieme dei punti di X in cui la dimensione è 3.

Dobbiamo ora applicare il lemma a tutti i punti di π , che contiene gli eventuali punti di non coerenza.

Tramite la parametrizzazione osserviamo che il germe X_x è irriducibile in tutti i punti $(0, 0, 0, c)$ dell'asse z , privato dell'origine, in quanto essi si ottengono per una e una sola scelta dei parametri.

Osserviamo inoltre che tutti i punti del «manico», benché singolari per l'equazione (1), sono regolari per X ; infatti intorno a ciascuno di essi l'ipersuperficie si riduce ad un piano. Pertanto tutti i punti di π del tipo $(0, 0, w, c)$ con $c > 0$, $w \neq 0$ sono di coerenza per X .

Analogo discorso per i punti $(0, 0, w, c)$ con $c \leq 0$ e $w \neq 0$, il germe è puramente dimensionale e, se non è irriducibile (cosa che accade per $c < 0$), è unione di due componenti lisce e quindi coerenti. (Si ricordi che i punti di π sono i punti delle generatrici doppie dei coni X_c).

Restano da esaminare quindi solo i punti P_c dell'asse z , di coordinate $(0, 0, 0, c)$ e i punti dell'asse w di coordinate $(0, 0, u, 0)$.

1) Se $c < 0$, la parametrizzazione ci dice che il germe X_{P_c} è irriducibile; poiché è puramente dimensionale, per il lemma, P_c è un punto di coerenza.

2) Se $c > 0$ si ha ancora che X_{P_c} è irriducibile, ma non puramente dimensionale; dunque P_c è un punto di non coerenza.

3) Per i punti $(0, 0, u, 0)$ con $u \neq 0$ il germe è irriducibile, ma non puramente dimensionale: anche questi sono quindi punti di non coerenza per X .

4) Se $u = c = 0$, cioè stiamo considerando l'origine di $\mathbf{R}^4$, il germe $\tilde{X}_0$ del complessificato di X_0 ha esattamente l'equazione (1), letta in $\mathbf{C}^4$; ogni rappresentante di $\tilde{X}_0$ è quindi un'ipersuperficie di $\mathbf{C}^4$, in quanto tale puramente 3-dimensionale.

Ma in ogni intorno U di $(0, 0, 0, 0)$ cadono punti regolari di X in cui X ha dimensione 2. Pertanto $\tilde{X}_0$ non può indurre il complessificato in tutti i punti di un intorno di x .

Si conclude pertanto che l'insieme di non coerenza di X è dato da

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \\ z \geq 0 \end{array} \right\}$$

e dunque è semianalitico, ma non analitico.

M. Galbiati ha provato in [2] che per un insieme analitico con equazioni globali l'insieme dei punti di non coerenza è sempre semianalitico.

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. FENSCH, *Reell-analytische Strukturen*, «Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Münster.» (1966).
- [2] M. GALBIATI, *Stratification et ensemble de non cohérence d'un espace analytique réel*. (Di prossima pubblicazione).
- [3] R. NARASIMHAN, *Introduction to the theory of analytic spaces*, «Lect. Notes», Springer-Verlag (1966).
- [4] A. TOGNOLI, *Proprietà globali degli spazi analitici reali*, «Annali di Mat. pura e applicata», ser. IV, 75 (1967).