ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

M. ROBERT FAURE

Stabilité et probabilité dans les systèmes d'équations différentielles non linéaires: cas de cycle limite ou de solution périodique dépendant du temps: équation de Fokker-Planck du premier ordre

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 54 (1973), n.6, p. 930-934.
Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_6_930_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_6_930_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica non lineare. — *Stabilité et probabilité dans les systèmes d'équations différentielles non linéaires: cas de cycle limite ou de solution périodique dépendant du temps: équation de Fokker-Planck du premier ordre.* Nota di M. ROBERT FAURE, presentata (*) dal Socio straniero A. LICHNEROWICZ.

SUMMARY. — In the next study, the Author examines the problem of probability associated with a mechanical system $\Sigma(x, y)$ whose definition is two differential equations of the first order, independent of time.

We study the influence of the stability of the essential elements of the trajectories of Σ : (limit-cycles, singular points) on the nature of Fokker-Planck's solutions of equation, associated with Σ .

It is proved that the density of probabilities is neither definite nor integrable to the singular stable points, and on the limit-cycles; then ρ must have the structure of distributions. When Σ is definite by differential equations with polynomes, the only case with density integrable is when there is just one single point which is a center.

Soit un système mécanique Σ représenté à l'instant t par la position d'un point $M(x_1 \cdots x_n)$ dans l'espace E^n . Nous avons établi que la densité de probabilité p qui doit satisfaire à l'équation de Fokker-Planck engendre un invariant intégral que Σ soit aléatoire, ou déterministe mais avec des conditions initiales inconnues, ceci résulte dans notre Note (1) du lien avec les probabilités en Géométrie.

Nous allons examiner le système représenté par deux équations différentielles indépendantes du temps et voir comment la structure topologique des courbes intégrales influe sur la nature de p . On prend $p \in C^1(x, y, t, \forall x, y, t)$ p est visiblement indépendante du temps car ce système Σ est invariant par la translation $t, t+h, h$ constante.

On considère le système d'équations différentielles indépendant du temps

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \end{cases}$$

(1) satisfait aux hypothèses suivantes:

- a) X et Y admettent des dérivées partielles premières continues dans tout le plan.
- b) les points singuliers de (1) sont en nombre fini.
- c) on suppose que (1) admet au moins un cycle limite (C).

(*) Nella seduta del 19 giugno 1973.

(1) *Probabilités géométriques et Probabilités en Mécanique*, « C. R. Académie des Sciences », 274 (1950-1951).

Soit Ω un ouvert contenant (C), $\bar{\Omega}$ par hypothèse ne contient aucun point singulier de (I). Ω est entièrement à distance finie de (C). Nous ne considérons dans ce qui suit que les portions de courbes intégrales qui entrées dans Ω n'en ressortent plus; si Γ est une courbe intégrale de Γ ; nous n'étudierons que $\Gamma \cap \Omega = \Gamma_\omega$.

Soit maintenant deux points de (C) M_{10} et M_{20} distincts mais arbitrairement voisins; on considère les normales en M_{10} et M_{20} à (C); elles coupent une Γ_ω particulière en une infinité de points, soit N_{10} et N_{20} , deux de ces points N_{10} situé sur la normale en M_{10} , et N_{20} sur la normale en M_{20} : $\overrightarrow{N_{10}}$ et $\overrightarrow{N_{20}}$ sont situés sur une même branche et sont infiniment voisins, $\overrightarrow{M_{10}M_{20}}$ et $\overrightarrow{N_{10}N_{20}}$ ayant la même orientation.

Considérons le quadrilatère mixtiligne Δ défini par $\overrightarrow{M_{10}M_{20}}$, $\overrightarrow{M_{20}N_{20}}$, $\overrightarrow{N_{20}N_{10}}$, $\overrightarrow{N_{10}M_{10}}$. On considère l'ensemble des Γ_ω issues de $\bar{\Delta}_0$. Lorsque sur (C) les points M_1 et M_2 coïncidant initialement avec M_{10} et M_{20} font n tours complets, N_{10} , N_{20} sont devenues N_{1n} , N_{2n} sur Γ_ω et le quadrilatère Δ_0 s'est déformé en quadrilatère Δ_n ayant toujours le côté $\overrightarrow{M_{10}M_{20}}$. Si P_n est le point de $\bar{\Delta}_n$ dont la projection P'_n sur (C) est la plus éloignée de M_{10} , Q_n celui dont la projection sur (C), Q'_n , est la plus éloignée de M_{20} , les points se succédant sur (C) dans l'ordre $P'_n M_{10} M_{20} Q'_n$; la compacité de $\bar{\Omega}$ entraîne l'existence d'une suite particulière $n_1, n_2, \dots, n_p$ telle que P_{n_i} et Q_{n_i} tendent vers des limites P_l et Q_l situées sur (C). Il résulte de la stabilité que l'aire de Δ_n tend vers zéro pour les suites n_i .

Si donc on suppose l'existence d'une densité de probabilité $p(x, y)$ satisfaisant à l'équation de Fokker-Planck ici indépendante du temps, on a:

$$\int_{\Delta_n} p(x, y) dx dy = \int_{\Delta_0} p dx dy = p_m \iint_{\Delta_n} dx dy$$

ou p_m est la densité moyenne de probabilité dans $\bar{\Delta}_n$. Il en résulte que $p_m(x, y)$ augmente indéfiniment et que sur (C), $p = \infty$.

Si on repère un point L du plan voisin de (C) par l'abscisse curviligne (s) de sa projection L' sur (C) et par sa distance à (C) telle que $\overrightarrow{L'L} = l \cdot \vec{n}$, $\vec{n}$ étant le vecteur unitaire de la normale, $\vec{T}$ le vecteur unitaire de la tangente avec $\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{ds}$ et $(\vec{T}, \vec{n}) = +\pi/2$, le nouvel élément d'aire est donné par $d\mathcal{L} \cdot ds |(1 - l/R)|$; R rayon de courbure de (C) en L'.

Or $U = \frac{1}{p(x, y)}$ est nulle sur (C) et comme $U \geq 0$ dans tout le plan on a

$$\frac{\partial U}{\partial l}(\theta, s) = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial U}{\partial s}(\theta, s) = 0$$

d'ou $p(x, y)$ au voisinage de (C) = $\frac{1}{l \frac{\partial U}{\partial l}(\theta l, s)}$, avec $0 < \theta < 1$. Il en ré-

sulte qu'en choisissant s'il le faut en raison du changement de variables un autre Ω soit Ω_1 avec $\Omega \supset \Omega_1 \supset \Gamma$

$$\iint_{\Omega_1} p \, dx \, dy = \iint_{\Omega_1} \frac{dI \, ds |1 - I/R|}{I \frac{\partial U}{\partial I}(\theta I, s)}$$

va diverger et par suite également l'intégrale dans tout le plan.

Ce résultat est valable pour les cycles stables, instables (il suffit de changer t en $-t$) ainsi que pour les cycles semi-stables.

Il est valable pour les points singuliers stables noeud, foyer; dans tous ces cas il n'est pas possible de définir une probabilité continue définie par l'équation de Fokker-Planck.

On suppose maintenant que X et Y sont des polynômes, on voit alors toujours pour des raisons de convergence d'intégrales qu'il ne peut y avoir de noeud à l'infini.

En vertu de la théorie de Poincaré, il ne peut donc y avoir de cols et de ce fait le système admettant toujours des points singuliers à distance finie ou infinie; le système doit admettre un centre point singulier unique et les courbes intégrales sont alors des cycles entourant ce centre.

Il y a donc deux cas distincts de solution de l'équation de Fokker-Planck:

1) le cas où le système Σ admet des éléments stables, la solution de l'équation de Fokker Planck ne peut être continue.

Si E est l'ensemble des éléments stables ou instables, la probabilité P pour un point M régi par le système (1) est la suivante

$$P(M \in E) = 1$$

$$P(M \notin E) = 0.$$

On peut dans le cas où X et Y sont des polynômes donner à p la structure d'une distribution.

2) Si X et Y sont des polynômes, il peut y avoir une densité continue si le système admet un point singulier unique: centre, les courbes intégrales étant des cycles entourant ce centre.

Il y a donc stabilité à la Poisson pour tout le plan comme l'avait établi Poincaré pour un domaine borné pour les invariants intégraux.

Cas des systèmes dépendant du temps à solutions périodiques. Soient maintenant le système d'équation

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y, t) \end{cases}$$

on fait les hypothèses suivantes permettant d'affirmer l'existence d'une solu-

tion périodique et d'étudier sa stabilité avec $p \in C^1 x, y, t, \forall x, y, t$:

- 1) X et Y sont des fonctions périodiques du temps de même période T;
- 2) X et Y admettent des dérivées partielles premières; X et Y et ces dérivées partielles sont continues pour tout x, y, t .
- 3) Le système E admet une solution périodique de période T, la courbe représentative de la solution ne se réduit pas à un point. Cette solution est asymptotiquement stable.

Soit (C) la courbe représentative de la solution; soit $M_0(t_0)$ le point de (C) correspondant pour la solution périodique aux instants $t_0 + nT$. Soient $M'_0 M''_0$ deux points voisins de M_0 et soit $\bar{\Delta}_0$ le triangle $M_0 M'_0 M''_0$.

Considérons l'ensemble des trajectoires de (E) issues de $\bar{\Delta}_0$ à l'instant t_0 ; leurs extrémités appartiendront à l'instant $t_0 + nT$ à $\bar{\Delta}_{t_0+nT}$ transformé de Δ_0 ; on a toujours l'invariant intégral

$$\iint_{\Delta_{t_0+nT}} p \, dx \, dy = \iint_{\Delta_0} p \, dx \, dy \quad \text{soit} \quad p_m \iint_{\Delta_{t_0+nT}} dx \, dy = \iint_{\Delta_0} p \, dx \, dy$$

p_m valeur moyenne. Or l'aire de Δ_{t_0+nT} tend vers zéro avec $1/n$ par suite p_m augmente indéfiniment et $p(x_0, y_0, t_0 + nT) \rightarrow \infty$ mais l'origine des temps étant arbitraire, on a $p(x_0, y_0, t_0) = \infty$. On voit donc comme auparavant que $\iint p(x, y, t_0) \, dx \, dy$ n'a pas de sens au voisinage de M_0 ; nous ne pouvons donc, pour affecter une probabilité aux différents ensembles du plan, qu'admettre que $M_0(x_0, y_0, t_0)$ à une probabilité non nulle mais qu'au voisinage de M_0 la densité de probabilité est nulle. Nous constatons donc l'existence d'une singularité dans la répartition des probabilités dans le cas où il existe une solution périodique asymptotiquement stable.

Il ne pourra donc exister une solution continue que si le système (E) n'admet pas de solution périodique possédant la stabilité asymptotique car c'est cette dernière propriété qui conduit à attribuer une densité infinie de probabilité au point $M(x(t_0), y(t_0), t_0)$.

Applications: Système d'équation

$$(E_1) \quad \frac{dx}{dt} = \lambda X(x, y, t)$$

$$(E_2) \quad \frac{dy}{dt} = \lambda Y(x, y, t)$$

λ paramètre réel, X, Y satisfaisant aux conditions suivantes

- 1) (E_1) et (E_2) sont périodiques de période T;
- 2) X et Y admettent des dérivées partielles premières et secondes continues pour tout x, y, t .

Une condition nécessaire pour que le système (E_1) (E_2) admette une solution de l'équation de Fokker-Planck continue est que le système associé (E'_1) , (E'_2)

$$(E'_1) \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\lambda}{T} \int_0^T X(x_1, y_1, u) du$$

$$(E'_2) \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{\lambda}{T} \int_0^T Y(x_1, y_1, u) du$$

admette un point singulier unique qui soit un centre.

L'intégration dans (E'_1) (E'_2) a lieu par rapport à u seul, x_1, y_1 étant constants.