Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Grioli

Proprietà variazionali nella meccanica dei continui. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.6, p. 924–929.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_6_924_0>

Fisica matematica. — *Proprietà variazionali nella meccanica dei continui.* Nota II (*) del Corrisp. GIUSEPPE GRIOLI.

SUMMARY. — A variational property is established, of the stress which is present in a Continuum with finite deformations, in two different types. The first type is significant from a heuristic point of view, whilst the second one is directly connected with the basic integration problem of the elastic equilibrium.

2. PROPRIETÀ VARIAZIONALI DIRETTE

La configurazione C di cui nella Nota I [24] sia di equilibrio per un Continuo tridimensionale esente da vincoli interni, in presenza di forze di massa di densità μF, di forze superficiali di densità $\boldsymbol{f}$ agenti sulla parte σ' della frontiera σ di C e di vincoli superficiali presenti sulla parte σ'' di σ $[\sigma = \sigma' + \sigma'']$ esplicanti delle reazioni di densità $\boldsymbol{\Phi}$.

Si suppone di sapere caratterizzare l'insieme $\mathfrak{I}_v$ di tutti i possibili sistemi di reazioni vincolari di cui i vincoli sono capaci.

La configurazione $C^{(0)}$ di cui nella Nota I sia invece una configurazione di riferimento che supporrò di equilibrio naturale, cioè esente da stress e stabile. Ciò per semplificare la trattazione, sicuro della possibilità di adattare le proprietà variazionali più avanti segnalate anche a casi più complessi: $C^{(0)}$ non esente da stress, presenza di vincoli interni, casi non isotermi.

Nel seguito denoterò con σ_0, σ_0', σ_0'' le posizioni di frontiera di $C^{(0)}$ corrispondenti a σ, σ', σ'' e porrò $\boldsymbol{\Phi}^{(0)} d\sigma_0 = \boldsymbol{\Phi} d\sigma$.

Le ben note equazioni di Cauchy hanno come conseguenza la importante proprietà di media

$$\int_C X_{rs}\, dC = -\int_C x_r F_s\, dC - \int_{\sigma'} x_r f_s\, d\sigma' - \int_{\sigma''} x_r \Phi_s\, d\sigma''. \tag{28}$$

Le equazioni di Cauchy sono lineari nelle X_{rs}. Ne segue che la classe di tutti i possibili stress in equilibrio con le forze di massa e con quelle superficiali assegnate su σ' si ottiene da uno stress X soddisfacente a quelle equazioni [ad esempio, quello reale] mediante l'aggiunta di un incremento ΔX che descriva la classe delle soluzioni delle equazioni di Cauchy, posto in esse uguali a zero le forze di massa e superficiali su σ' e tale che su σ'' dia luogo a reazioni $\boldsymbol{\Phi} + \Delta\boldsymbol{\Phi}$ appartenenti a $\mathfrak{I}_v$. Sia $\mathfrak{I}(\Delta X)$ l'insieme di tutte le matrici ΔX soddisfacenti a tali condizioni. Ne segue che l'invariante lineare di ogni stress incrementale ΔX di $\mathfrak{I}(\Delta X)$ soddisfa alla relazione di media

$$\int_C I(\Delta X)\, dC = -\int_{\sigma''} x_r\, \Delta\Phi_r\, d\sigma''. \tag{29}$$

(*) Presentata nella seduta del 12 maggio 1973.

Si supponga esistente la soluzione e che $x_s \equiv y_r + u_r$ ne rappresenti la configurazione attuale. Per ogni matrice di variazione, ΔX, di $\mathfrak{I}(\Delta X)$, si ha, in base a (21), (25) e supposta non variata la configurazione C,

$$(30)\qquad I(\Delta X) = I(d' \Delta L d') = I(d' d' \Delta L) = I[(1 + 2\varepsilon')\Delta L] = -I[(2 N_{/L} - 1)\Delta L],$$

avendo indicato con $N_{/L}$ la matrice di componente $\partial N / \partial L_{rs}$.

Si denoti con $N^{(X)}$ ciò che diviene la $N(L)$ espressa da (19) quando si esprima L in funzione di X, in base a (25). Si ha evidentemente, con chiaro significato del simbolo $N_{/X}$,

$$(31)\qquad N_{/L} = d' N^{(X)}_{/X} d' \quad , \quad \Delta L = d^{s-1} \Delta X \, d^{s-1}$$

e in definitiva

$$(32)\qquad \begin{aligned} I(\Delta X) &= -I[(2\, d' N^{(X)}_{/X} d' - 1)\, d^{s-1} \Delta X \, d^{s-1}] = \\ &= -I[2\, N^{(x)}_{/x} - (1 + 2\varepsilon')^{-1} \Delta X] \, . \end{aligned}$$

Si ponga, tenuto conto di (8),

$$(33)\qquad Q = \int_C [2\, N^{(X)} - (1 + 2\,\varepsilon^{(i)})_{rs} X_{rs}] \, dC - \int_{\sigma''} x_r \, \Phi_r \, d\sigma'' .$$

La (29), in base a (32), (33), si traduce nella proprietà variazionale seguente [del tipo del teorema di Menabrea].

TEOREMA I. *Tra tutti gli stress di Cauchy*, X, *in equilibrio sulla configurazione attuale con le forze di massa, con quelle superficiali ove esse sono assegnate e che diano luogo a reazioni compatibili con i vincoli, quello reale rende stazionario il funzionale* Q.

Si può aggiungere, per le proprietà già segnalate per la funzione $W'(\varepsilon')$, che, almeno quando C non sia troppo discosto da $C^{(0)}$, il funzionale Q ha in C un minimo.

Vale la pena di osservare che la proprietà di stazionarietà o di minimo espressa per il funzionale nel Teorema I diviene maggiormente espressiva nel caso dei sistemi isotropi.

Infatti in tal caso è valida la (27) e $N^{(X)}$ [e con essa Q] dipende in ultima analisi soltanto da X e $\varepsilon^{(i)}$.

Si tenga conto delle relazioni (21), (24). Ne segue

$$(34)\qquad \int_C I(\Delta X) \, dC = \int_{C^{(0)}} x_{r,s} \, \Delta K_{rs} \, dC^{(0)} = -\int_{C^{(0)}} \frac{\partial V}{\partial K_{rs}} \Delta K_{rs} \, dC^{(0)},$$

per cui, posto

$$(35)\qquad B = \int_{C^{(0)}} V(K) \, dC^{(0)} - \int_{\sigma''} x_r \, \Phi^{(0)}_r \, d\sigma''_0 \, ,$$

la (29) si traduce nella proprietà variazionale

$$\Delta B = 0 \,, \tag{36}$$

e si legge

TEOREMA II. *Tra tutti gli stress* K *in equilibrio su* $C^{(0)}$ *con le forze di massa e superficiali assegnate e che su* σ_0'' *diano luogo a reazioni* Φ_0 *compatibili con i vincoli quello reale rende stazionario il funzionale* B.

Anche ora si può aggiungere che se C è non troppo discosta da $C^{(0)}$ il punto di stazionarietà è anche di minimo.

OSSERVAZIONE. Le proprietà di media (28), (29) valgono *qualunque sia la natura del continuo*. Ne segue che in ogni caso sussiste la proprietà variazionale

$$\int_{C^{(0)}} x_{r,s}\, \Delta K_{rs}\, dC^{(0)} + \int_{\sigma_0''} x_r\, \Delta\Phi_r^{(0)}\, d\sigma_0'' = 0 \,, \tag{37}$$

la quale diviene significativa e degna di essere studiata nelle sue conseguenze non appena si leghino le $x_{r,s}$, alle K_{rs} tramite le relazioni costitutive.

Vale la pena di osservare che le proprietà variazionali espresse nei Teoremi I e II valgono a configurazione non variata. Ne segue che esse rimangono valide a ogni istante anche nel caso dinamico. Gli enunciati si modificano semplicemente per la sostituzione della locuzione «*forze di massa*» con la locuzione «*forze di massa e d'inerzia*».

3. TEOREMA DI INVERSIONE

Si supponga che il vincolo su σ'' consista nell'assegnato spostamento $\bar{\boldsymbol{u}}$ [ad esempio $\bar{\boldsymbol{u}} \equiv 0$ per l'incastro] e si ammetta che nella classe precisata nel Teorema II, il funzionale B ammetta una matrice di stazionarietà, K'. Posto, formalmente,

$$\varphi_{rs} = -\left(\frac{\partial V}{\partial K_{rs}}\right)_{K=K'} \,, \tag{38}$$

da (35), (36) si deduce

$$\int_{C^{(0)}} \varphi_{rs}\, \Delta K_{rs}\, dC^{(0)} + \int_{\sigma_0''} \Delta\Phi_r^{(0)} (y_r + \bar{u}_r)\, d\sigma_0'' = 0 \,, \tag{39}$$

da ritenersi valida per ogni scelta delle ΔK_{rs}, e di $\Delta\Phi_r^{(0)}$ tali che $K + \Delta K$ e $\boldsymbol{\Phi}^{(0)} + \Delta\boldsymbol{\Phi}^{(0)}$ siano in equilibrio con le forze di massa e superficiali assegnate su σ_0' e compatibili con i vincoli.

Si assuma

$$\Delta K_{rs} = e_{spt}\, F_{rp,t} \,, \tag{40}$$

ove e_{spt} denota il tensore di Ricci e F_{rp} è una qualunque matrice a elementi funzioni derivabili delle y_i che dia luogo a reazioni $\Delta\boldsymbol{\Phi}^{(0)}$ nulle su σ_0'' [ad esempio F_{rp} nulle su σ_0''].

Ne segue, da (39)

$$e_{spt}\,\varphi_{rs,t} = 0\,, \tag{41}$$

che assicura l'esistenza di tre funzioni x_r' delle y_i soddisfacenti alle reazioni

$$x_{r,s}' = \varphi_{rs}\,. \tag{42}$$

Di conseguenza, posto $u_r' \equiv x_r' - y_r$, la (39) diviene

$$\int\limits_{C^{(0)}} u_{r,s}'\,\Delta K_{rs}\,dC^{(0)} + \int\limits_{\sigma_0''} \bar{u}_r\,\Delta\Phi_r^{(0)}\,d\sigma_0'' = 0\,, \tag{43}$$

che si traduce in

$$\int\limits_{\sigma_0''} (\bar{u}_r - u_r')\,\Delta\Phi_r^{(0)}\,d\sigma_0'' = 0\,. \tag{44}$$

La (44) in effetti esprime che lo spostamento cui dà luogo la K′ soddisfa in media alle condizioni di vincolo, ma è evidente che sotto opportune condizioni di regolarità deve potersi arrivare a una coincidenza locale di u_r' con $\bar{u}_r$. Ad esempio, ciò accade ove si pensi che il vincolo abbia la capacità di esplicare qualunque reazione: la larga arbitrarietà di $\Delta\Phi_r^{(0)}$ implica in tal caso proprio $u_r' - \bar{u}_r \equiv 0$.

Se invece il vincolo su σ_0'' è unilaterale (6), ad esempio di appoggio piano rigido e liscio, il vettore $\Delta\boldsymbol{\Phi}^{(0)}$ *deve* supporsi, come $\Phi^{(0)}$, ortogonale a σ_0''.

In tal caso $\bar{\boldsymbol{u}}$ risulta ortogonale a $\boldsymbol{\Phi}^{(0)}$ ove non c'è distacco e il funzionale B riduce a

$$\bar{B} = \int\limits_{C^{(0)}} V(K)\,dC^{(0)} - \int\limits_{\sigma_0''} y_r\,\Phi_r^{(0)}\,d\sigma_0''\,. \tag{45}$$

La possibilità di inversione è legata non solo a opportune condizioni di regolarità ma anche al fatto che in corrispondenza alla configurazione di equilibrio $\bar{B}$ abbia proprio un minimo.

La supposta proprietà di minimo di B si traduce, in base a (42), (45),

$$\int\limits_{\sigma_0''} u_r'\,\Delta\Phi_r^{(0)}\,d\sigma'' \geq 0\,. \tag{46}$$

Si supponga che la reazione $\boldsymbol{\Phi}^{(0)}$ minimante sia non nulla su una parte σ_1'' di σ_0'' [e ivi parallela e concorde alla normale $\boldsymbol{n}^{(0)}$ a σ_0'' orientata verso la

(6) Studi approfonditi sul problema lineare con appoggio unilaterale, già posto da Signorini [7], sono dovuti a G. Fichera [10], [12], [21].

parte consentita dal vincolo] e nulla sulla rimanente parte σ_2'' di σ_0''. Ne segue che $\Delta\boldsymbol{\Phi}^{(0)}$ deve essere [oltre che equilibrato su σ_0''] parallelo a $\boldsymbol{n}^{(0)}$ sull'intera σ_0'' e ad esso concorde su σ_2''.

Si assuma, ad esempio $\Delta\boldsymbol{\Phi}^{(0)} \equiv 0$ su σ_2''. Ne segue, da (46),

$$\int_{\sigma_1''} u_r' \, \Delta\Phi_r^{(0)} \, d\sigma_0'' \geq 0 , \tag{47}$$

per ogni $\Delta\boldsymbol{\Phi}^{(0)}$ parallelo a $\boldsymbol{n}^{(0)}$ e equilibrato su σ_1''.

Sotto opportune condizioni di regolarità ciò implica che $\boldsymbol{u}'$ sia tangenziale su σ_1''. La (46) si riduce allora a

$$\int_{\sigma_2''} u_r' \, \Delta\Phi_r^{(0)} \, d\sigma'' \geq 0 , \tag{48}$$

ove il vettore $\Delta\boldsymbol{\Phi}^{(0)}$ oltre che equilibrato [su σ_0''] deve essere concorde a $\boldsymbol{n}^{(0)}$ su σ_2''. Ciò implica che $\boldsymbol{u}'$ formi su σ_2'' angolo non ottuso con $\boldsymbol{n}^{(0)}$. Basta ciò per essere sicuri che il vettore $\boldsymbol{u}'$ soddisfa sempre in media alle condizioni di vincolo e – sotto opportune condizioni di regolarità – anche localmente.

Si deve osservare che le proprietà di equilibratezza cui deve soddisfare il vettore $\Delta\boldsymbol{\Phi}^{(0)}$ possono essere soddisfatte certamente nel caso di appoggio piano (7).

Il teorema di inversione sopra dimostrato rappresenta in realtà la traduzione del teorema di esistenza per il sistema differenziale dell'Elastostatica in quello dell'esistenza di un punto di stazionarietà o addirittura di minimo di un certo funzionale.

Vale la pena di osservare che – supposto esistente un tale particolare punto – su tale base si può stabilire un metodo di integrazione per il problema di equilibrio elastico con deformazioni finite.

Basta a tal fine osservare che il sistema differenziale a cui soddisfa la matrice K è lineare e pertanto esso può sostituirsi con il sistema di infinite equazioni integrali che si ottiene considerando in $C^{(0)}$ un sistema completo di polinomi ortogonali, sistema che è proprio del tipo di quello che si ha nel caso lineare delle piccole deformazioni [salvo la mancata simmetria delle K_{rs}]. È pertanto possibile approssimare in media le K_{rs} mediante successioni di polinomi con coefficienti vincolati dal sopra detto sistema di equazioni integrali e in ultima analisi far dipendere il funzionale B (K) da tali coefficienti che si determineranno mediante la condizione di stazionarietà vincolata di B. Il procedimento è analogo a quello valido nel caso lineare e rinuncio a fare tutte le necessarie precisazioni (8).

(7) Studi approfonditi sulle conseguenze di [44] e sulle condizioni cui deve soddisfare la superficie di vincolo nel caso lineare non piano sono contenuti in [15], [19], [22], [23]. I risultati ivi raggiunti si mantengono in parte validi anche nelle questioni qui trattate.

(8) A tale proposito vedi [4], [9], [11], [13].

BIBLIOGRAFIA

[1] A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria I, « Annali di matematica pura e applicata », *22* (1943).

[2] E. REISSNER, *On a variational theorem in elasticity*, « J. of Math. a Phy. », *25*, 90–95 (1950).

[3] G. GRIOLI, *Validità del teorema di Menabrea e integrazione del problema dell'elastostatica in casi non isotermi*, « Rend. Sem. Mat. Univer. di Padova », *21*, 202–208 (1952).

[4] G. GRIOLI, *Proprietà di media e integrazione del problema dell'elastostatica isoterma*, « Annali di matematica pura e applicata », ser. IV, *33* (1952).

[5] E. REISSNER, *On a variational theorem for finite elastic deformations*, « J. Math. Phy. », *32*, 129 (1953).

[6] T. MANACORDA, *Sopra un principio variazionale di E. Reissner per la statica dei mezzi continui*, « Boll. Univ. Mat. Italia », *9* (3), 154–159 (1954).

[7] A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria IV, « Annali di matematica pura e applicata », *51* (1960).

[8] G. CARICATO, *Sul teorema di Menabrea*, « Rend. di Matematica », *19*, 318–332 (1960).

[9] G. GRIOLI, *Mathematical Theory of Elastic Equilibrium* (*Recent Results*), Springer–Verlag (1962).

[10] G. FICHERA, *Sul prodotto elastostatico di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *34* (1963).

[11] G. GRIOLI, *Problemi di integrazione nella teoria dell'equilibrio elastico*, Corso C.I.M.E., Bressanone 1963.

[12] G. FICHERA, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, « Mem. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 7 (5) (1964).

[13] G. GRIOLI, *Problemi di integrazione e formulazione integrale del problema fondamentale dell'elastostatica*, Simposio internazionale sulle applicazioni dell'Analisi alla Fisica Matematica, Cagliari–Sassari, Ed. Cremonese (1964).

[14] D. GALLETTO, *Sulla condizione d'isotropia per i sistemi continui a trasformazioni reversibili*, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova » (1967).

[15] T. VALENT, *Qualche proprietà dei sistemi di vettori applicati. Possibili applicazioni alla teoria matematica dell'elasticità*, « Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova », *34* (1967).

[16] G. GRIOLI, *Il teorema di Menabrea alla luce delle deformazioni finite*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *44* (1) (1968).

[17] D. GALLETTO, *Sulla potenza dello stress e sull'isotropia dei materiali iperelastici*, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova », *40*, 227 (1968).

[18] D. GALLETTO, *Sui materiali iperelastici anisotropi*, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova », *40*, 237 (1968).

[19] T. VALENT, *Qualche proprietà e applicazione di sistemi di vettori definiti su una superficie*, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova », *41* (1968).

[20] G. CARICATO, *Il teorema di Menabrea per trasformazioni non isoterme di un corpo elastico vincolato, anisotropo e non omogeneo, con stress iniziale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *44* (2–3) (1968).

[21] G. FICHERA, *Boundary value problems of Elasticity with unilateral constraints*, « Handbuch der Physik–B », VI/2 (1972).

[22] T. VALENT, *Una decomposizione di uno spazio hilbertiano avente interesse e significato in Meccanica*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *52* (1972).

[23] T. VALENT, *Questioni di esistenza e di unicità per il problema elastostatico con un vincolo di appoggio unilaterale e supporto rigido nel caso di piccole deformazioni*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *50* (1973).

[24] G. GRIOLI, *Proprietà variazionali nella Meccanica dei Continui*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei » (Nota I), *54* (5) (1973).