Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Georges Le Calvé, Radu Theodorescu

Systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes à temps continu. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.6, p. 898–901.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_6_898_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Calcolo delle probabilità. — *Systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes à temps continu* (*). Nota III di GEORGES LE CALVE e RADU THEODORESCU, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si continua lo studio dei sistemi aleatori generalizzati con vincoli completi di tempo continuo iniziato nelle Note I e II [1] la cui lettura è necessaria per la comprensione del presente lavoro.

On continue l'étude des systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes à temps continu, commencée dans les Notes I et II [1], dont la lecture préalable est indispensable pour la compréhension du présent travail.

5.4. Examinons maintenant dans quelle mesure la donnée des fonctions $\pi(t, (w, x); \mathrm{A})$, $p(t, w; \mathrm{B})$ et $q(t, w; \mathrm{A})$ détermine complètement le s.a.g.l.c.

Auparavant nous avons besoin d'un résultat auxiliaire.

Soient $(\mathrm{L}, \mathfrak{L})$ et $(\mathrm{M}, \mathfrak{M})$ deux espaces mesurables et $k(t, l; \mathrm{E})$ pour tout $t \in \mathrm{T}$, $l \in \mathrm{L}$ et $\mathrm{E} \in \mathrm{L}$ une fonction de trois arguments telle que: (k) pour tout $t \in \mathrm{T}$ et $l \in \mathrm{L}$ fixés, $k(t, l; \mathrm{E})$ est une mesure signée sur $\mathfrak{M}$ et $k(t, l; \mathrm{M}) = 0$; (kk) pour tout $l \in \mathrm{L}$ et $\mathrm{E} \in \mathfrak{M}$ fixés, $k(t, l; \mathrm{E})$ est uniformément continue en $t \in \mathrm{T}$ par rapport à $l \in \mathrm{L}$ et $\mathrm{E} \in \mathfrak{M}$, et pour tout $t \in \mathrm{T}$ et $\mathrm{E} \in \mathfrak{M}$ fixés, $k(t, l; \mathrm{E})$ est $\mathfrak{M}$–mesurable; (kkk) pour tout $t \in \mathrm{T}$ et $l \in \mathrm{L}$, $|k(t, l; \cdot)| \leq$ const, en prenant comme norme d'une mesure signée la variation totale.

LEMME 5.6. – *Soit $k(t, l; \mathrm{E})$ vérifiant les trois conditions (k) à (kkk).*

1) *L'équation*

$$\frac{d\mu_s(\mathrm{E})}{ds} = \int_{\mathrm{L}} \mu_l(dl)\, k(s, l; \mathrm{E})$$

pour tout $s > t$ et avec la condition initiale $\mu_t(\mathrm{E}) = \mu(\mathrm{E})$ a une solution unique dans l'espace de toutes les mesures signées finies sur $\mathfrak{M}$; si de plus μ est une probabilité sur $\mathfrak{M}$, μ_s l'est aussi pour tout $s > t$.

2) *Si $(\mathrm{L}, \mathfrak{L}) = (\mathrm{M}, \mathfrak{M})$, alors l'équation*

$$\frac{d\varphi_t(l)}{dt} = -\int_{\mathrm{L}} k(t, l; de)\, \varphi_t(e)$$

(*) Recherche supportée par la subvention A–7223 du Conseil National de Recherche du Canada.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1973.

(1) Voir « Rend. Acc. Naz. Lincei », *54*, 434–440 et 577–583 (1973).

pour tout $t < s$ *et avec la condition finale* $\varphi_s(l) = \varphi(l)$ *a une solution unique dans l'espace de toutes les fonctions réelles mesurables bornées définies sur* L.

Démonstration. – La deuxième partie du lemme est très exactement la deuxième partie du Théorème 3 [1], p. 317. Quant à la première partie, elle se démontre de manière analogue à la première partie du théorème cité.

Dans tout ce qui suit nous dirons que les données (π, p, q, Π, P, Q) sont *compatibles* si elles vérifient les relations (5.7) à (5.10).

PROPOSITION 5.7. – *Soit* ${}^tQ^s$ *la solution des équations* (5.11) *et* (5.12) *avec la condition initiale (respectivement finale)* $Q(w\,;A)$. *Alors la probabilité de transition* ${}^tP^s$, *définic par*

$$ {}^tP^s(w\,;B) = \int_W {}^tQ^s(w\,;dw')\,P(w'\,;B) $$

pour tout $t \leq s$ *vérifie* (1.7) *et coïncide avec la solution unique des deux équations* (5.15) *et* (5.16) *avec la condition initiale (respectivement finale)* $P(w\,;B)$.

Démonstration. – Il suffit d'appliquer le Lemme 5.6.

Nous démontrons également la

PROPOSITION 5.8. – *Soit* ${}^tQ^s$ *la solution des équations* (5.11) *et* (5.12) *avec la condition initiale (respectivement finale)* $Q(w\,;A)$. *Alors la probabilité de transition* ${}^t\Pi^s$ *définie par*

$$ {}^t\Pi^s((w, x)\,;A) = \int_W \Pi((w, x)\,;dw')\,{}^tQ^s(w'\,;A) $$

pour tout $t \leq s$ *vérifie* (1.6) *et coïncide avec la solution unique des deux équations* (5.13) *et* (5.14) *avec la condition finale (respectivement initiale)* $\Pi((w, x)\,;A)$.

Démonstration. – En effet, d'après les Lemmes 5.2 et 5.3 toute probabilité de transition ${}^t\Pi^s$ vérifiant la condition de cette proposition satisfait les équations (5.13) et (5.14). Or le Lemme 5.6 indique que ces équations ont une solution unique.

Enfin, nous avons la

PROPOSITION 5.9. – *Soit* ${}^t\Pi^s$ *la solution de l'équation* (5.13) *avec la condition finale* $\Pi((w, x)\,;A)$. *Alors la probabilité de transition* ${}^tQ^s$ *définie par*

$$ {}^tQ^s(w\,;A) = \int_X P(w\,;dx)\,{}^t\Pi^s((w, x)\,;A) $$

pour tout $t \leq s$ *vérifie* (1.5) *et coïncide avec la solution unique des deux équations* (5.11) *et* (5.12) *avec la condition initiale (respectivement finale)* $Q(w\,;A)$.

Démonstration. – Soit

$$ {}^tQ^s(w\,;A) = \int_X P(w\,;dx)\,{}^t\Pi^s((w, x)\,;A)\,. $$

Alors

$$
{}^t\mathrm{Q}^{s+\Delta s}(w\,;\mathrm{A}) - {}^t\mathrm{Q}^s(w\,;\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{X}} \mathrm{P}(w\,;\mathrm{d}x)\,({}^t\Pi^{s+\Delta s}((w,x)\,;\mathrm{A}) - {}^t\Pi^s((w,x)\,;\mathrm{A})) =
$$

$$
= \Delta s \left\{ \int_{\mathrm{X}} \mathrm{P}(w\,;\mathrm{d}x) \left[\int_{\mathrm{W}} {}^t\Pi^s((w\,,x)\,;\mathrm{d}w')\,q(s\,,w'\,;\mathrm{A}) + o(\Delta s) \right] \right\} =
$$

$$
= \Delta s \left[\int_{\mathrm{W}} {}^t\mathrm{Q}^s(w\,;\mathrm{d}w')\,q(s\,,w\,;\mathrm{A}) + o(\Delta s) \right].
$$

Il en découle que ${}^t\mathrm{Q}^s$ vérifie l'équation (5.12) et de même pour l'équation (5.11). Le Lemme 5.6 termine alors la démonstration.

Les trois propositions précédentes nous conduisent au

THÉORÈME 5.10. – *Si* π (*respectivement* q) *vérifie les conditions du Lemme* 5.6, *les données* (π , Π , P) (*respectivement* (q, Π, P)) *déterminent complètement les probabilités de transition d'un s.a.g.l.c.*

Démonstration. – Supposons connues (π , Π , P). Nous déterminons Q, q et p par les relations (5.7), (5.8) et (5.10) et les données (π p , q , Π , P , Q) sont alors compatibles. Les relations (5.8) et (5.10) montrent de même que q et p remplissent les conditions du Lemme 5.6. En utilisant les propositions précédentes 5.7, 5.8 et 5.9, nous déduisons qu'il existe, pour tout $t\,,s \in \mathrm{T}$, $s \leq t$, les probabilités de transition ${}^t\Pi^s$, ${}^t\mathrm{P}^s$ et ${}^t\mathrm{Q}^s$ uniques vérifiant les relations (1.6), (1.7) et (1.8) pour tout $t \leq r \leq s$. Il est facile de voir que (1.4) est vraie et donc que ${}^t\Pi^s$ et ${}^t\mathrm{P}^s$ vérifient (1.1) et (1.2) pour tout $t \leq r \leq s$.

Nous procédons de manière analogue avec (q , Π , P), et le théorème est démontré.

6. PROBABILITÉS DE TRANSITION PERMANENT CONTINUES

6.1. Il est possible d'obtenir des équations de diffusion sur ${}^t\Pi^s$, ${}^t\mathrm{P}^s$ et ${}^t\mathrm{Q}^s$ en adaptant la théorie déjà existante pour les processus de Markov, comme nous l'avons déjà fait dans le paragraphe précédent pour les probabilités de transition permanentes discontinues.

Pour $t\,,s \in \mathrm{T}\,,t \leq s$, soit ${}^t\mathrm{K}^s$ une probabilité de transition de $(\mathrm{R}\,,\mathcal{B})$ dans $(\mathrm{R}\,,\mathcal{B})$, où $\mathcal{B}$ est la σ-algèbre des boréliens sur R. Rappelons la définition suivante:

DÉFINITION 6.1. – La probabilité de transition ${}^t\mathrm{K}^s$ est appelée *permanente continue*, si les deux conditions suivantes sont vérifiées: (l) pour tout $x \in \mathrm{R}$ et tout $\varepsilon > 0$

$$
\int_{|x-y|>\varepsilon} {}^t\mathrm{K}^s(x\,;\mathrm{d}y) = o(s-t)
$$

uniformément par rapport à $t < s$; *(ll)* il existe deux fonctions $a(t, x)$ et $b(t, x)$ telles que pour tout $x \in \mathrm{R}$ et tout $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{|x-y|\leq\varepsilon} (y-x)\, {}^t\mathrm{K}^s(x\,;\,dy) = a(t, x)(s-t) + o(s-t)$$

et

$$\int\limits_{|x-y|\leq\varepsilon} (y-x)^2\, {}^t\mathrm{K}^s(x\,;\,dy) = b(t, x)(s-t) + o(s-t)$$

uniformément par rapport à $t < s$.

6.2. Supposons que $({}^t\mathrm{W}, {}^t\mathfrak{W}) = ({}^t\mathrm{X}, {}^t\mathfrak{X}) = (\mathrm{R}, \mathfrak{B})$. Nous nous contenterons plus simplement, ici, de donner une équation sur ${}^t\mathrm{Q}^s$ et une équation sur ${}^t\mathrm{P}^s$, en application brutale d'un résultat sur les processus de Markov.

PROPOSITION 6.2. – *Supposons que* ${}^t\mathrm{Q}^s$ *soit permanente continue, et que les fonctions de* w, ${}^t\mathrm{Q}^s(w\,;\mathrm{A})$ *et* ${}^t\mathrm{P}^s(w\,;\mathrm{B})$, *aient pour tout* $t, s \in \mathrm{T}, t < s$, *et tout* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{B}$ *fixés, des dérivées premières et secondes en* w, *qui soient continues et bornées. Supposons de plus que les fonctions* $a(t, w)$ *et* $b(t, w)$, *relatives à* ${}^t\mathrm{Q}^s$, *soient continues. Alors* ${}^t\mathrm{Q}^s$ *et* ${}^t\mathrm{P}^s$ *sont dérivables en t et nous obtenons*:

$$\frac{\partial\, {}^t\mathrm{Q}^s(w\,;\mathrm{A})}{\partial t} = a(t, w)\,\frac{\partial\, {}^t\mathrm{Q}^s(w\,;\mathrm{A})}{\partial w} + \frac{1}{2}\, b(t, w)\,\frac{\partial^2\, {}^t\mathrm{Q}^s(w\,;\mathrm{A})}{\partial w^2} \tag{6.1}$$

avec $\lim\limits_{t\uparrow s} {}^t\mathrm{Q}^s(w\,;\mathrm{A}) = \mathrm{Q}(w\,;\mathrm{A})$, *et*

$$\frac{\partial\, {}^t\mathrm{P}^s(w\,;\mathrm{B})}{\partial t} = a(t, w)\,\frac{\partial\, {}^t\mathrm{P}^s(w\,;\mathrm{B})}{\partial w} + \frac{1}{2}\, b(t, w)\,\frac{\partial^2\, {}^t\mathrm{P}^s(w\,;\mathrm{B})}{\partial w^2} \tag{6.2}$$

avec $\lim\limits_{t\uparrow s} {}^t\mathrm{P}^s(w\,;\mathrm{B}) = \mathrm{P}(w\,;\mathrm{B})$.

Démonstration. – La Proposition 6.1 n'est autre que l'adaptation du Théorème 1 [1], p. 373.

L'équation (6.1) est *la première équation de Kolmogorov* sur ${}^t\mathrm{Q}^s$. On peut, évidemment, donner le même nom à (6.2). Pour ${}^t\Pi^s$, il est facile de voir, en adaptant la démonstration du même Théorème 1 [1], p. 373, que, sous des hypothèses convenables, elle vérifie également une équation aux dérivées partielles, où $\partial\, {}^t\Pi^s/\partial t$ s'exprime à l'aide de $\partial\, {}^t\Pi^s/\partial w$, $\partial\, {}^t\Pi^s/dx$, $\partial^2\, {}^t\Pi^s/\partial w^2$, $\partial^2\, {}^t\Pi^s/\partial w \partial x$ et $\partial^2\, {}^t\Pi^s/\partial x^2$.

Pour ce qui est de *la deuxième équation de Kolmogorov* (ou *l'équation de Fokker-Planck*) il faut passer aux densités, mais il n'y a pas de difficultés de principe.

De même que pour les processus de Markov, il en résulte que se donnant a et b et une condition limite, on peut déterminer complètement les probabilités de transition d'un s.a.g.l.c., à condition, évidemment, que certaines conditions de régularité soient verifiées.