
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

SANTI VALENTI

Sull'equazione funzionale

$$t(x + kz, y, z) = f(x, y, z)t(x, y, z)$$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 54 (1973), n.6, p. 872–876.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_6_872_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Equazioni funzionali. — *Sull'equazione funzionale* $t(x + kz, y, z) = f(x, y, z) t(x, y, z)$ (*). Nota di SANTI VALENTI, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — A wide class of partial functional equations (all generalizing in a quite natural way the classical recurrence relation for the Γ -function), is considered in § 1, in order to give an existence and unicity theorem for the solution of each of them, provided this solution be a partially lg-convex one.

Further, in § 2 is sketched a straightforward method of resolution for an interesting subclass of such a class of equations, only involving simple techniques of finite differences calculus.

1. Sia Ω l'aperto di $\mathbb{R}^3$ così definito

$$\Omega = \{P \equiv (x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$$

e sia $f_k(P)$ una funzione del tipo

$$(1.1) \quad f_k(P) = \frac{x(x+z)(x+2z) \cdots [x+(k-1)z]}{y^k},$$

definita su Ω e con k intero positivo. L'equazione funzionale

$$(1.2) \quad t(x + kz, y, z) = f_k(P) t(P),$$

nella funzione incognita $t(P)$, generalizza naturalmente la ben nota relazione di ricorrenza su cui si fonda la teoria della funzione Γ come impostata in [1] e [2]; la (1.2) rientra evidentemente nella classe delle equazioni funzionali del tipo

$$(1.3) \quad t(x + kz, y, z) = f(P) t(P),$$

ove si assume la $f(P)$ con le sole ipotesi

$$(1.4) \quad f(P) = \varphi(x, z) \psi(y) \quad , \quad \varphi(x, z) > 0 \quad , \quad \psi(y) > 0.$$

In questo paragrafo ci riferiremo appunto, per maggiore generalità, alla forma (1.3), mentre il caso particolare (1.2) sarà per un certo aspetto esaminato nel successivo paragrafo.

Osserviamo previamente che la (1.3) è risolta in Ω non appena lo sia nel diedro Δ_k definito dalle limitazioni $x > 0, y > 0, kz \geq x$. Invero, se $P' \in \Omega - \Delta_k$, si denoti con $[x'/z']$ il massimo multiplo di k minore di x'/z' e si ponga $x'' = x' - [x'/z'] \cdot z'$; il punto $P'' \equiv (x'', y', z')$ risulterà allora in Δ_k ;

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le Applicazioni (del C.N.R.), nell'anno accademico 1972-73.

(**) Nella seduta del 19 giugno 1973.

ed essendo $t(x'' + [x'/z'] \cdot z', y', z') = t(P')$, noto che sia il valore $t(P'')$, si avrà subito – per ricorrenza sulla (1.3) – il valore $t(P')$.

Stabilito questo, ricerchiamo le soluzioni positive e lg-convesse rispetto ad x dell'equazione in esame; a questo scopo tornerà utile quanto sopra osservato e sarà anche opportuno considerare l'insieme

$$\Pi_k = \Omega \cap \{P \equiv (x, y, z) : x = kz\},$$

nonché la funzione $f/\Pi_k(P)$, restrizione della $f(P)$ a Π_k .

A proposito delle suddette soluzioni, vale il seguente

TEOREMA. *Detto N l'insieme degli interi positivi, si abbia, per $m \in N$:*

$$(1.5) \quad \lim_{m, \infty} \frac{f/\Pi_k[(m+1)x, y, z]}{f/\Pi_k(mx, y, z)} = 1;$$

inoltre la $\varphi(x, z)$ sia lg-concava rispetto ad x ed esista una famiglia sommabile $\{u_m(x, z), m \in N\}$ di funzioni positive per cui riesca:

$$(1.6) \quad \frac{[\varphi(skz, z)]^{x/kz}}{\{\varphi[(s-1)kz, z]\}^{x/kz}} \leq [1 + u_s(x, z)] \cdot \frac{\varphi(x + skz, z)}{\varphi(skz, z)},$$

definitivamente per $s \in N$. Allora esiste ed è unica, a meno della sua restrizione a Π_k , la soluzione lg-concava rispetto ad x della (1.3).

Iniziamo col dimostrare che, quali che siano x e z positivi, riesce convergente e non nullo il prodotto infinito

$$\prod_{s=2}^{\infty} A_s(x, z) = \prod_{s=2}^{\infty} \frac{[\varphi(skz, z)]^{(x/kz)+1}}{\{\varphi[(s-1)kz, z]\}^{x/kz} \varphi(x + skz, z)};$$

invero, perché ciò avvenga basta che convergano la serie

$$\sum_{s=2}^{\infty} [A_s(x, z) - 1]$$

e quella dei quadrati dei suoi termini (cfr. [3]); ora, che la prima di tali serie converga segue subito da (1.6), mentre la convergenza della seconda discenderà dall'essere non negativo il termine generale della prima. Ma, poiché $\varphi(x, z)$ è lg-concava rispetto ad x , quali che siano x e z positivi ed $s \in N - \{1\}$, dovrà averci:

$$\frac{\lg \varphi(x + skz, z) - \lg \varphi(skz, z)}{x} \leq \frac{\lg \varphi(skz, z) - \lg \varphi[(s-1)kz, z]}{kz},$$

e da questa si trae, con semplici passaggi, che nessuna delle funzioni $[A_s(x, z) - 1]$ è mai negativa. Sicché, effettivamente, il prodotto infinito in questione risulta convergente e non nullo.

Allora, fissata ad arbitrio su Π_k la funzione $w(kz, y, z)$ e definita su tutto Ω la funzione

$$w_\rho(P) = \sum_{s=2}^{\rho-1} \left[\frac{x}{kz} \lg \frac{\varphi(skz, z)}{\varphi[(s-1)kz, z]} + \lg \frac{\varphi(skz, z)}{\varphi(x + skz, z)} \right] + \\ + \left(\frac{x}{kz} + 1 \right) \lg \varphi(kz, z) + \left(\frac{x}{kz} - 1 \right) \lg \psi(y) + w(kz, y, z) + \\ - \lg \varphi(x, z) - \lg \varphi(x + kz, z),$$

si può considerare, su tutto Ω , la funzione limite

$$w(P) = \lim_{\rho, \infty} w_\rho(P),$$

che risulta convessa rispetto ad x perché tali sono tutte le $w_\rho(P)$. Inoltre, fra $w_{\rho+1}(P)$ e $w_\rho(x + kz, y, z)$ intercede la relazione, di diretta verifica:

$$w_{\rho+1}(P) = w_\rho(x + kz, y, z) - \lg \varphi(x, z) + \\ - \lg \psi(y) + \left(\frac{x}{kz} + 1 \right) \lg \frac{\varphi(\rho kz, z)}{\varphi[(\rho-1)kz, z]},$$

donde, al limite per $\rho \rightarrow \infty$ e in virtù di (1.5):

$$w(P) = w(x + kz, y, z) - \lg \varphi(x, z) - \lg \psi(y),$$

che mostra come la funzione $e^{w(P)}$ risolva la (1.3).

L'esistenza della soluzione richiesta è così provata per costruzione.

Per quanto concerne l'unicità, osserviamo innanzitutto che se una funzione reale definita su Ω - e diciamola ancora $w(P)$ - vi riesce convessa rispetto ad x , allora, per ogni intero $r > k$ e multiplo di k , l'essere $x \leq kz$ implicherà la doppia disuguaglianza

$$(1.7) \quad x \{w(rz, y, z) - w[(r-k)z, y, z]\} \leq \\ \leq kz [w(rz + x, y, z) - w(rz, y, z)] \leq \\ \leq x \{w[(r+k)z, y, z] - w(rz, y, z)\};$$

se ora si richiede che $e^{w(P)}$ soddisfi alla (1.3), detto ρ il rapporto fra r e k e posto per brevità $g = \lg \varphi$, $j = \lg \psi$, si ottiene facilmente l'identità

$$(1.8) \quad w(rz + x, y, z) - w(rz, y, z) = w(P) + \\ + \sum_{s=0}^{\rho-1} g(x + skz, z) - \sum_{s=1}^{\rho-1} g(skz, z) + j(y) - w(kz, y, z),$$

che, introdotta nella (1.7), fornisce dopo semplici calcoli e per $\rho \geq 3$:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{kz} \left\{ g(kz, z) + \sum_{s=2}^{\rho-1} \lg \frac{\varphi(skz, z)}{\varphi[(s-1)kz, z]} + j(y) \right\} + \sum_{s=1}^{\rho-1} g(skz, z) + \\ & -j(y) + w(kz, y, z) - \sum_{s=0}^{\rho-1} g(x + skz, z) \leq w(P) \leq \\ & \leq \frac{x}{kz} \left\{ g(kz, z) + \sum_{s=2}^{\rho} \lg \frac{\varphi(skz, z)}{\varphi[(s-1)kz, z]} + j(y) \right\} + \sum_{s=1}^{\rho-1} g(skz, z) + \\ & -j(y) + w(kz, y, z) - \sum_{s=0}^{\rho-1} g(x + skz, z) \quad , \quad P \in \Delta_k. \end{aligned}$$

E ciò, in forza della (1.5), garantisce evidentemente che la $w(P)$ resti individuata, — a meno della sua restrizione a Π_k —, nel diedro Δ_k . Sicché, ove si rammenti l'osservazione preliminare circa il suddetto diedro, anche l'unicità è provata.

2. Esamineremo ora brevemente il caso particolare (1.2) e anzi, giacché la generalità del risultato che stiamo per conseguire non dipende sostanzialmente dal valore di k , ci limiteremo a porre $f_k(P) = f_1(P) = \frac{x}{y}$, considerando la (1.2) nella semplice forma:

$$(2.1) \quad t(x + z, y, z) = \frac{x}{y} t(P);$$

assumeremo in più che la restrizione di $t(P)$ a Π_1 sia assegnata omogenea con dato grado ν di omogeneità. L'interesse rivestito da questo caso particolare è di duplice natura: da un canto lo stretto legame con la ben nota « distribuzione gamma generalizzata » (cfr. [4], [5] e [6]); d'altro canto il risultato espresso nella seguente

PROPOSIZIONE. — *Se la restrizione di $t(P)$ a Π_1 è omogenea con grado di omogeneità ν , allora la determinazione della soluzione lg-convessa rispetto a x della (2.1) è ricondotta alla risoluzione di una equazione alle differenze finite, ordinaria, del primo ordine, omogenea e a coefficienti costanti.*

In primo luogo, l'omogeneità (di grado ν) della $t/\Pi_1(P)$ implica l'omogeneità (pure di grado ν) della $t(P)$ in tutto Ω ; inverso, operando su $w_\rho(P)$ sotto le ipotesi fatte, si ottiene senza difficoltà la relazione:

$$t_\rho(\alpha P) = t_\rho(P) \frac{t(\alpha z, \alpha y, \alpha z)}{t(z, y, z)}, \quad \forall \alpha > 0;$$

donde, per $\rho \rightarrow \infty$ e per l'assunta omogeneità di t/Π_1 , l'asserto.

Da ciò segue l'esistenza di una (ed ovviamente una sola) funzione χ tale che sia identicamente

$$(2.2) \quad t(P) = z^\nu \chi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right);$$

dimodoché, posto come è lecito

$$(2.3) \quad \chi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{z}\right) \omega\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

e sostituendo (2.2) in (2.1), si avrà per la nuova funzione incognita ω :

$$(2.4) \quad \omega\left(\frac{x}{z} + 1, \frac{y}{z}\right) = \frac{z}{y} \omega\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Questa equazione alle differenze, la cui unica radice caratteristica h è evidentemente

$$h = \frac{z}{y},$$

avrà per soluzione generale la funzione

$$\omega\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \tilde{C}\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \left(\frac{z}{y}\right)^{x/z},$$

$\tilde{C}$ designando una funzione periodica di periodo 1 rispetto al primo argomento e, per il resto, arbitraria. Ma la $t(P)$ ottenuta sostituendo ω in (2.3) e poi (2.3) in (2.2) non risulterà, in generale, lg-convessa rispetto ad x , mentre lo sarà certamente se avremo posto

$$\tilde{C}\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = C\left(\frac{y}{z}\right),$$

ossia se avremo assunto la $\tilde{C}$ costante rispetto al primo argomento (e arbitrariamente dipendente dal secondo). Con ciò, peraltro, come garantisce il teorema del paragrafo precedente, avremo ottenuto *la sola* soluzione della (2.1) che sia lg-convessa rispetto ad x , a meno della condizione al contorno

$$t/\Pi_1(P) = C\left(\frac{y}{z}\right) \frac{z^{y+1}}{y},$$

la quale permette di determinare completamente la C .

La proposizione è così dimostrata ⁽¹⁾.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. BOHR e J. MOLLERUP, *Laerebog i matematisk Analyse*, III, 149 (Kopenhagen 1922).
- [2] E. ARTIN, *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, (Leipzig 1931).
- [3] E. T. WHITTAKER e G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, 40 (Cambridge 1927).
- [4] S. VALENTI, *A general «dynamical» Model for a Class of statistical Distributions* (I), «Acta Phys. Pol.», A 39 (1), 3 (1971).
- [5] S. VALENTI, *A general «dynamical» Model for a Class of statistical Distributions* (II), «Acta Phys. Pol.», A 41 (4), 447 (1972).
- [6] J. H. LIENHARD e P. L. MEYER, *A physical Basis for the generalized Gamma Distribution*, «Quart. Appl. Math.», 25 (3), 330 (1967).

(1) Si noti come il procedimento usato, salvo le ovvie modifiche, conduca alla *risoluzione diretta* della data equazione *per qualsiasi valore di k*. In generale si perverrà ad un'equazione in ω del k -esimo ordine, quindi con radici caratteristiche negative o addirittura complesse in aggiunta alla $h = z/y$. La considerazione di siffatte radici, tuttavia, già ci porterebbe al di là dei limiti che ci siamo imposti nella presente Nota.