Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Marro, Remo Rossi

Condizioni di convessità nella programmazione dinamica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.4, p. 604–614.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_4_604_0>

Programmazione dinamica. — *Condizioni di convessità nella programmazione dinamica.* Nota di GIOVANNI MARRO e REMO ROSSI, presentata (*) dal Socio G. EVANGELISTI.

SUMMARY. — The convexity of return functions in dynamic programming implies the possibility of employing standard procedures of convex programming for the searches of minima of functions which are performed at every stage of the computational procedure.

In the present work by means of a geometric approach are derived necessary and sufficient conditions for the convexity of return functions in dynamic optimization problems with bounded states and controls and in presence of isoperimetric constraints.

1. INTRODUZIONE

Com'è noto, in relazione ai problemi di programmazione non lineare, le condizioni di convessità giocano un ruolo di grande importanza, in quanto costituiscono la base delle prove di esistenza e unicità e forniscono la possibilità di sviluppare eleganti dimostrazioni della convergenza di molti procedimenti iterativi di calcolo.

In tale campo notevole peso hanno avuto i contributi, ormai classici, di Kuhn e Tucker [1], Wolfe [2, 3], Rosen [4].

L'impiego degli algoritmi della programmazione lineare e non lineare per la soluzione di problemi di ottimizzazione dinamica è stata studiata da Dantzig [5], Torng [6], Lee [7, 8], Ho [9], Rosen [10], Gilbert e Barr [11–14], che hanno posto i fondamenti teorici di metodi computazionali di grande interesse applicativo.

Lo studio puramente analitico di tali problemi comporta sviluppi spesso di notevole complessità: il significato e il peso delle varie condizioni non sono sempre facilmente comprensibili se non si ricorre alla visione geometrica, che risulta per contro intuitiva e formativa.

Nel presente lavoro, basato appunto su un'interpretazione geometrica dei problemi di ottimizzazione già introdotta e impiegata dai medesimi Autori [15, 16], viene considerato in particolare il procedimento della programmazione dinamica. Si stabiliscono condizioni che garantiscono la convessità dei costi parziali e l'unicità della soluzione nel caso che gli stati e i controlli siano vincolati sia direttamente sia mediante relazioni isoperimetriche, quali si presentano in una vasta classe di applicazioni.

Tali condizioni forniscono una precisa delimitazione dei requisiti da porre al modello matematico affinché si possa far uso di tecniche di calcolo particolarmente idonee ed efficienti, come ad esempio la programmazione

(*) Nella seduta del 14 aprile 1973.

dinamica incrementale, cioè la programmazione dinamica applicata limitatamente ad un intorno ristretto di una particolare traiettoria, che viene così localmente migliorata per passi successivi.

L'uso della programmazione dinamica incrementale consente di limitare la tabulazione dei costi e delle decisioni ad un insieme di stati relativamente ristretto, con evidente risparmio di memoria. Per contro, il metodo trova una limitazione alla sua applicazione nel fatto che la convergenza alla soluzione ottima non è sempre assicurata, se i costi parziali non sono convessi.

Interessanti applicazioni del metodo della programmazione dinamica incrementale sono state proposte in rapporto alla soluzione di problemi di accumulo e di distribuzione ottima di risorse. Ad esempio, Bernholtz e Graham [17–20] hanno trattato con tale metodo il problema dell'ottimizzazione dell'esercizio di impianti di produzione di energia elettrica.

2. POSIZIONE DEL PROBLEMA

Il problema che verrà trattato nel seguito è quello della ricerca del minimo della funzione

$$c = \sum_{k=0}^{N-1} g^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k) \,, \tag{2.1}$$

in presenza dei vincoli

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^k \qquad (k = 0 \,, \cdots, N-1) \,, \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_i^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k) \leq b_i \qquad (i = 1 \,, \cdots, s) \,, \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{x}^k \in \mathcal{X}^k \qquad (k = 0 \,, \cdots, N) \,, \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{u}^k \in \mathcal{U}^k \qquad (k = 0 \,, \cdots, N-1) \,. \tag{2.5}$$

Si suppone che le funzioni $g^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k)$, $f_i^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k)$ siano convesse e che gli insiemi $\mathcal{X}^k$, $\mathcal{U}^k$ siano convessi e chiusi.

Le variabili $\boldsymbol{u}^k \in R^m (k = 0 \,, \cdots, N-1)$ rappresentano la successione delle decisioni o controlli applicati a un sistema descritto dall'equazione matriciale alle differenze finite (2.2), in cui le $\boldsymbol{x}^k \in R^n (k = 0 \,, \cdots, N)$ rappresentano la successione degli stati.

È consuetudine considerare uniche incognite del problema lo stato iniziale ottimo $\boldsymbol{x}^{0*}$ e la successione dei controlli ottimi $\boldsymbol{u}^{k*} (k = 0 \,, \cdots, N-1)$, in quanto essi rappresentano le variabili direttamente manipolabili nel sistema fisico descritto dal modello posto e i loro valori determinano univocamente quelli di tutte le altre variabili del sistema.

I vincoli (2.4) e (2.5), che, in particolare, si possono ridurre alla limitazione di ciascuna delle componenti dei vettori $\boldsymbol{x}^k$, $\boldsymbol{u}^k$ ad un intervallo, rappresentano restrizioni di carattere fisico, mentre i vincoli isoperimetrici (2.3) discendono da limitazioni sulle quantità di risorse disponibili.

3. Il procedimento di calcolo mediante la programmazione dinamica

Per introdurre l'enunciazione di alcune interessanti proprietà relative alla soluzione del problema posto, è opportuno ricordare brevemente come, in relazione al caso particolare in esame, possa venire utilizzato il procedimento della programmazione dinamica.

I vincoli isoperimetrici (2.3) si possono scrivere globalmente

$$\sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k) \leq \boldsymbol{b} \,, \tag{3.1}$$

convenendo che il simbolo di disuguaglianza applicato a due vettori rappresenti la disuguaglianza componente per componente. Tale notazione, che consente una scrittura più concisa delle formule, sarà estesamente impiegata anche nel seguito.

Dei vincoli (3.1) si può tener conto mediante l'artificio di ampliare il modello matematico (2.2) con le equazioni alle differenze finite

$$\boldsymbol{v}^{k+1} = \boldsymbol{v}^k + \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k) \qquad (k = 0, \cdots, N-1) \,, \tag{3.2}$$

cui vengono associate le condizioni di estremità

$$\boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{0} \,, \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{v}^N \in \mathfrak{V} \,, \tag{3.4}$$

in cui $\mathfrak{V}$ è l'insieme convesso e chiuso

$$\mathfrak{V} = \{\boldsymbol{v}^N : \boldsymbol{v}^N \leq \boldsymbol{b}\} \,. \tag{3.5}$$

Tale riformulazione del problema riconduce la messa in conto dei vincoli isoperimetrici ad un ampliamento dello stato. Fatta eccezione per le equazioni (3.2), che non sono lineari come le (2.2), il problema riformulato è infatti dello stesso tipo di quello posto al paragrafo precedente, salvo che non vi compaiono i vincoli isoperimetrici.

L'applicazione della programmazione dinamica al problema posto conduce all'equazione funzionale ricorrente

$$c^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k) = \min_{\boldsymbol{u}^k \in \mathfrak{W}_1^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k)} [g^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k) + c^{k+1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^k, \boldsymbol{v}^k + \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k))] \qquad (k = N-1, N-2, \cdots, 0) \,, \tag{3.6}$$

in cui $\mathfrak{W}_1^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k)$ si è indicato l'insieme delle decisioni ammissibili all'istante k-esimo: per la presenza dei vincoli isoperimetrici e dei vincoli sugli stati, esso è funzione dello stato a tale istante, come più dettagliatamente sarà illustrato nel seguito (relazione (4.2) del prossimo paragrafo).

La tabulazione delle funzioni che esprimono i costi parziali ottimi

$$c^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k) \qquad (k = 0, \cdots, N-1) \tag{3.7}$$

e le relative decisioni ottime

$$\boldsymbol{u}^{k*}(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k) \qquad (k = 0, \cdots, N-1), \tag{3.8}$$

ottenute calcolando il minimo indicato nella (3.6), fornisce la soluzione del problema.

Infatti si sceglie lo stato iniziale $[\boldsymbol{x}^{0*}, \boldsymbol{v}^{0*}]$ in modo che, soddisfacendo il vincolo dato dalla prima delle (2.4) e dalla (3.3), corrisponda a un minimo della prima delle (3.7). Tale scelta, attraverso le (3.8), (2.2) e (3.2) determina l'intera traiettoria, in quanto di tutti i rimanenti vincoli si è già tenuto conto definendo opportunamente l'insieme $\mathfrak{W}_1^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k)$ nella (3.6).

La scelta dello stato iniziale $[\boldsymbol{x}^{0*}, \boldsymbol{v}^{0*}]$, in cui si pone sempre $\boldsymbol{v}^{0*} = \mathbf{0}$, costituisce un problema di ricerca del minimo della prima delle (3.7) in presenza di vincoli convessi. Com'è noto la stretta convessità della funzione comporta l'unicità del punto di minimo se l'insieme di vincolo è convesso (1).

Si dimostrerà che la proprietà di convessità, che gioca un ruolo fondamentale anche nella determinazione del minimo specificato nella relazione ricorrente (3.6), è soddisfatta da tutte le funzioni della successione (3.7), ipotesi poste al paragrafo 2. Si discuterà inoltre sotto quali ipotesi addizionali la convessità risulta stretta, e quindi il minimo unico.

4. TEOREMI SULLA CONVESSITÀ DEI COSTI PARZIALI

Per maggior chiarezza di esposizione, la dimostrazione verrà sviluppata dapprima nel caso più semplice, in cui manchino i vincoli isoperimetrici; in un secondo tempo, utilizzando i risultati così ottenuti, la prova verrà estesa al caso generale.

TEOREMA 4.1. *Le funzioni* $c^k(\boldsymbol{x}^k)$ $(k = 0, \cdots, N-1)$, *che particolarizzano le* (3.6) *in assenza di vincoli isoperimetrici, sono convesse. Esse sono strettamente convesse se le funzioni* $g^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k)$ *sono strettamente convesse rispetto alle* $\boldsymbol{x}^k$.

Dimostrazione. In assenza di vincoli isoperimetrici la (3.6) si scrive

$$c^k(\boldsymbol{x}^k) = \min_{\boldsymbol{u}^k \in \mathfrak{W}_1^k(\boldsymbol{x}^k)} [g^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k) + c^{k+1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^k)] \qquad (k = N-1, N-2, \cdots, 0). \tag{4.1}$$

Si dimostra facilmente che $\mathfrak{W}_1^k(\boldsymbol{x}^k) \subseteq R^m$, che rappresenta l'insieme delle decisioni ammissibili all'istante k–esimo in funzione dello stato, è convesso e chiuso. Infatti, se con $\mathfrak{W}^k \subseteq R^{n+m}$ si indica l'insieme degli stati e dei controlli ammissibili all'istante k–esimo, si può scrivere la relazione ricorrente

$$\mathfrak{W}^k = \{[\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k] : \boldsymbol{x}^k \in \mathfrak{X}^k, \boldsymbol{u}^k \in \mathfrak{U}^k, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^k \in \mathfrak{S}^{k+1}\} \qquad (k = 0, \cdots, N-1), \tag{4.2}$$

(1) Definizioni e proprietà relative alle funzioni convesse e strettamente convesse sono riportate in Appendice.

in cui è

$$(4.3)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{S}^k = \{\boldsymbol{x}^k\colon \textit{esiste } \boldsymbol{u}^k \textit{ tale che } [\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k] \in \mathfrak{W}^k\} \qquad (k = 0, \cdots, N-1), \\ &\mathfrak{S}^n = \mathfrak{X}^n . \end{aligned}$$

$\mathfrak{S}^i \subseteq R^n$ rappresenta l'insieme degli stati ammissibili all'istante i–esimo, cioè l'insieme degli stati all'istante i–esimo per i quali esiste almeno una sequenza di controlli ammissibile $\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{u}^{i+1}, \cdots$ tale che i vincoli (2.2), (2.4) e (2.5) siano soddisfatti per $k = i, i+1, \cdots$

Essendo l'ultimo degli insiemi (4.3) convesso, la relazione (4.2), scritta per $k = n-1$, fornisce un insieme convesso, in quanto intersezione di tre insiemi convessi. La convessità di $\mathfrak{W}^{N-1}$ porta, in base alla relazione di definizione data dalla penultima delle (4.3), alla convessità di $\mathfrak{S}^{N-1}$; con ragionamento analogo si prova la convessità di $\mathfrak{W}^{N-2}$, $\mathfrak{S}^{N-2}$ e così via.

Alla convessità del generico $\mathfrak{W}^k$ consegue quella dell'insieme $\mathfrak{W}_1^k(\boldsymbol{x}^k)$ indicato nella (4.1), che è definito mediante la relazione

$$(4.4)\qquad \mathfrak{W}_1(\boldsymbol{x}^k) = \{\boldsymbol{u}^k : [\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k] \in \mathfrak{W}^k\} .$$

Per dimostrare la convessità della funzione $c^k(\boldsymbol{x}^k)$ si procede pure iterativamente: si ipotizza che $c^{k+1}(\boldsymbol{x}^{k+1})$ sia convessa, per cui la funzione da minimizzare a secondo membro della (4.1) è convessa, in quanto somma di funzioni convesse (cfr. Lemma A.1); il secondo termine della somma, in particolare, è una funzione convessa in quanto funzione convessa di funzione lineare.

Per il Lemma A.5 pertanto la funzione a primo membro della (4.1) è convessa.

Se la funzione $g^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k)$ è strettamente convessa rispetto a $\boldsymbol{x}^k$, per il Corollario A.2 e il Lemma A.5, $c^k(\boldsymbol{x}^k)$ è pure strettamente convessa. $\triangleleft$

TEOREMA 4.2. *Le funzioni* $c^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k)$ $(k = 0, \cdots, N-1)$ *definite dalla* (3.6) *sono convesse e soddisfano la relazione* $c^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^{k\prime}) \leq c(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^{k\prime\prime})$ *per ogni coppia di vettori* $\boldsymbol{v}^{k\prime}, \boldsymbol{v}^{k\prime\prime}$ *tali che sia* $\boldsymbol{v}^{k\prime} \leq \boldsymbol{v}^{k\prime\prime}$ (2). *Esse sono strettamente convesse rispetto alle variabili* $\boldsymbol{x}^k$ *se le funzioni* $g^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k)$ *sono strettamente convesse rispetto alle* $\boldsymbol{x}^k$.

Dimostrazione. Seguendo un procedimento analogo a quello sviluppato per il Teorema 3.1, si dimostra anzitutto che l'insieme $\mathfrak{W}^k \subseteq R^{n+s+m}$, che rappresenta il luogo degli stati ampliati e dei controlli ammissibili all'istante k–esimo, è convesso e soddisfa la disuguaglianza

$$(4.5)\qquad \mathfrak{W}_1^k(\boldsymbol{v}^{k\prime}) \supseteq \mathfrak{W}_1^k(\boldsymbol{v}^{k\prime\prime}) \quad \text{per ogni coppia } \boldsymbol{v}^{k\prime}, \boldsymbol{v}^{k\prime\prime} \text{ tale che sia } \boldsymbol{v}^{k\prime} \leq \boldsymbol{v}^{k\prime\prime}.$$

In accordo con il simbolismo precedentemente introdotto, con $\mathfrak{W}_1^k(\boldsymbol{v}^k)$ si indica l'insieme degli stati e dei controlli ammissibili all'istante k–esimo,

(2) Si ricorda che con il segno di disuguaglianza tra vettori si indica la disuguaglianza delle singole componenti.

in funzione delle risorse $\boldsymbol{v}^k$ a quell'istante disponibili, ossia

$$\mathfrak{W}_1^k(\boldsymbol{v}^k) = \{[\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k] : [\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k, \boldsymbol{u}^k] \in \mathfrak{W}^k\} . \tag{4.6}$$

La proprietà di convessità dell'insieme $\mathfrak{W}^k$, unitamente alla (4.5), equivale alla relazione

$$[\alpha \boldsymbol{x}^{k'} + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{x}^{k''}, \alpha \boldsymbol{v}^{k'} + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{v}^{k''} - \beta\, , \alpha \boldsymbol{u}^{k'} + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{u}^{k''}] \in \mathfrak{W}^k \tag{4.7}$$

$$\text{per ogni coppia di punti } [\boldsymbol{x}^{k'}, \boldsymbol{v}^{k'}, \boldsymbol{u}^{k'}]\, , [\boldsymbol{x}^{k''}, \boldsymbol{v}^{k''}, \boldsymbol{u}^{k''}] \in \mathfrak{W}^k,$$

$$\text{per ogni } \alpha \text{ tale che sia } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ e per ogni } \beta \geq 0 .$$

Per definizione è

$$\mathfrak{W}^k = \{[\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k, \boldsymbol{u}^k] : \boldsymbol{x}^k \in \mathfrak{X}^k, \boldsymbol{u}^k \in \mathfrak{U}^k, [\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^k, \boldsymbol{v}^k + \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k)] \in \mathfrak{S}^{k+1}\} \tag{4.8}$$

$$(k = 0\, , \cdots, N - 1)\, ,$$

in cui è

$$\mathfrak{S}^k = \{[\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k] : \quad \textit{esiste } \boldsymbol{u}^k \textit{ tale che } [\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k, \boldsymbol{u}^k] \in \mathfrak{W}^k\} \tag{4.9}$$

$$(k = 0\, , \cdots, N - 1)\, ,$$

$$\mathfrak{S}^N = \{[\boldsymbol{x}^N, \boldsymbol{v}^N\}] : \boldsymbol{x}^N \in \mathfrak{X}^N, \boldsymbol{v}^N \in \mathfrak{V}\}. \tag{4.10}$$

$\mathfrak{S}^i \subseteq R^{n+s}$ rappresenta l'insieme degli stati ampliati ammissibili all'istante i-esimo, cioè l'insieme degli stati $[\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{v}^i]$ per i quali esiste almeno una successione di controlli ammissibile $\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{u}^{i+1}, \cdots$ tale che i vincoli (2.2), (2.4), (2.5), (3.2) e (3.4) siano soddisfatti per $k = i\, , i + 1\, , \cdots$

Si considerano in $\mathfrak{W}^k$ i punti arbitrari $[\boldsymbol{x}^{k'}, \boldsymbol{v}^{k'}, \boldsymbol{u}^{k'}]\, , [\boldsymbol{x}^{k''}, \boldsymbol{v}^{k''}, \boldsymbol{u}^{k''}]$ e si verifica che la (4.7) è soddisfatta qualora valga un'analoga relazione per $\mathfrak{W}^{k+1}$.

Posto

$$\boldsymbol{x}^{k+1'} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{k'} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{k'} \quad , \quad \boldsymbol{x}^{k+1''} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{k''} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{k''},$$

$$\boldsymbol{v}^{k+1'} = \boldsymbol{v}^{k'} + \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}^{k'}, \boldsymbol{u}^{k'}) \quad , \quad \boldsymbol{v}^{k+1''} = \boldsymbol{v}^{k''} + \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}^{k''}, \boldsymbol{u}^{k''})\, ,$$

deve essere evidentemente $[\boldsymbol{x}^{k+1'}, \boldsymbol{v}^{k+1'}]\, , [\boldsymbol{x}^{k+1''}, \boldsymbol{v}^{k+1''}] \in \mathfrak{S}^{k+1}$ e quindi, per definizione, esistono controlli $\boldsymbol{u}^{k+1'}, \boldsymbol{u}^{k+1''}$ tali che sia $[\boldsymbol{x}^{k+1'}, \boldsymbol{v}^{k+1'}, \boldsymbol{u}^{k+1'}]$, $[\boldsymbol{x}^{k+1''}, \boldsymbol{v}^{k+1''}, \boldsymbol{u}^{k+1''}] \in \mathfrak{W}^{k+1}$.

Ogni punto $[\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k, \boldsymbol{u}^k]$ che soddisfa la relazione (4.7) soddisfa pure le relazioni specificate a secondo membro della (4.8): le prime due in quanto $\mathfrak{X}^k$ e $\mathfrak{U}^k$ sono insiemi convessi, la terza in quanto il punto

$$[\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{v}^{k+1}, \boldsymbol{u}^{k+1}] = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^k, \boldsymbol{v}^k + \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k)\, , \alpha \boldsymbol{u}^{k+1'} + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{u}^{k+1''}] \tag{4.11}$$

appartiene a $\mathfrak{W}^{k+1}$.

Infatti è

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}^{k+1} &= \boldsymbol{v}^k + \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k) \\ &\leq \alpha \boldsymbol{v}^{k'} + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{v}^{k''} - \beta + \alpha \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}^{k'}, \boldsymbol{u}^{k'}) + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}^{k''}, \boldsymbol{u}^{k''}) \\ &= \alpha \boldsymbol{v}^{k+1'} + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{v}^{k+1''} - \beta\, ,\end{aligned}$$

cioè

$$\boldsymbol{v}^{k+1} = \alpha \boldsymbol{v}^{k+1'} + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{v}^{k+1''} - \beta - \beta' , \qquad \text{con} \quad \beta' \geq 0 .$$

Di conseguenza il punto (4.11) è esprimibile con la relazione

$$[\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{v}^{k+1}, \boldsymbol{u}^{k+1}] = [\alpha \boldsymbol{x}^{k+1'} + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{x}^{k+1''}, \alpha \boldsymbol{v}^{k+1'} + \\ + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{v}^{k+1''} - \beta - \beta', \alpha \boldsymbol{u}^{k+1'} + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{u}^{k+1''}] ,$$

per cui appartiene a $\mathfrak{W}^{k+1}$ soddisfacendo la relazione (4.7), con indice $k + 1$ in luogo di k.

Avendo dimostrato che l'insieme $\mathfrak{W}^k$ è convesso e soddisfa la (4.5), l'asserto del teorema è di facile deduzione.

Sotto l'ipotesi che la funzione $c^{k+1}(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{v}^{k+1})$ sia convessa e soddisfi la condizione specificata nell'enunciato del teorema, anche la funzione $c^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k)$ gode di tali proprietà.

Infatti la funzione da minimizzare a secondo membro della (3.6) è convessa in quanto somma di due funzioni convesse; la seconda di queste, in particolare, è convessa in virtù del Lemma A.4.

D'altra parte la ricerca del minimo è vincolata all'insieme

$$\mathfrak{W}_1^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k) = \{\boldsymbol{u}^k : [\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k, \boldsymbol{u}^k] \in \mathfrak{W}^k\} ,$$

manifestamente convesso e chiuso, per cui il valore del minimo, per il Lemma A.5, è ancora una funzione convessa che soddisfa la condizione specificata nell'enunciato del Teorema perchè, come si è precedentemente verificato, l'insieme di vincolo

$$\mathfrak{W}_1^k(\boldsymbol{v}^k) = \{[\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k] : [\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k, \boldsymbol{u}^k] \in \mathfrak{W}^k\}$$

si amplia al diminuire delle componenti di $\boldsymbol{v}^k$ ed inoltre la funzione $c^{k+1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^k, \boldsymbol{v}^k + \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k))$, che compare come addendo nella funzione da minimizzare, diminuisce al diminuire di $\boldsymbol{v}^k$.

Nel caso in cui la prima delle funzioni a secondo membro della (3.6) sia strettamente convessa in $\boldsymbol{x}^k$, la funzione da minimizzare è strettamente convessa e quindi, per il Lemma A.5, la $c^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{v}^k)$ è strettamente convessa in $\boldsymbol{x}^k$. $\triangleleft$

5. Alcune conseguenze dei teoremi stabiliti

Nel precedente paragrafo si è provato che i costi parziali (3.7), determinati con il metodo della programmazione dinamica, sono funzioni convesse in $\boldsymbol{x}^k$ per ogni k.

Al fine della scelta del punto iniziale ottimo interessa, in particolare, la funzione $c^0(\boldsymbol{x}^0, \mathbf{0})$: perché tale funzione sia strettamente convessa è sufficiente che almeno una delle $g^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k)$ $(k = 0, \cdots, N - 1)$ sia strettamente convessa in $\boldsymbol{x}^k$. Una condizione sufficiente per l'unicità del punto iniziale ottimo $\boldsymbol{x}^{0*}$ si può pertanto facilmente stabilire come conseguenza dei risultati ottenuti e di una nota proprietà dei minimi di funzioni convesse vincolati ad insiemi convessi e chiusi.

COROLLARIO 5.1. *Perché il punto iniziale ottimo $\boldsymbol{x}^{0*}$ sia unico, è sufficiente che almeno una delle funzioni $g^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k)$ sia strettamente convessa in $\boldsymbol{x}^k$.*

L'unicità dell'intera traiettoria ottima, cioè di ciascuna delle decisioni di cui essa è conseguenza, è invece legata alla stretta convessità delle funzioni $g(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k)$ rispetto a $\boldsymbol{u}^k$: infatti il punto di minimo di una funzione strettamente convessa, vincolato ad un insieme convesso, è unico. Si può pertanto enunciare il seguente corollario.

COROLLARIO 5.2. *Perché la successione dei controlli ottimi $\boldsymbol{u}^{k*}$ $(k = 0, \cdots, N - 1)$ sia unica, è sufficiente che le funzioni $g^k(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{u}^k)$ $(k = 0, \cdots, N - 1)$ siano strettamente convesse in $\boldsymbol{u}^k$.*

APPENDICE

A.1. – *Alcune proprietà delle funzioni convesse.*

Per una più agile organizzazione del testo, sono stati raccolti in questa Appendice alcuni Lemmi, parte dei quali originali, che vengono utilizzati nelle dimostrazioni oggetto del lavoro.

Com'è noto, una funzione $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \leq R^n$, si dice *convessa* se, per ogni coppia di punti $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in R^n$ e per ogni α tale che sia $0 \leq \alpha \leq 1$, vale la disuguaglianza

$$f(\alpha \boldsymbol{x}' + (1 - \alpha)\boldsymbol{x}'') \leq \alpha f(\boldsymbol{x}') + (1 - \alpha) f(\boldsymbol{x}'') . \tag{A.1}$$

La funzione si dice *strettamente convessa* se la (A.1) vale con esclusione del segno di uguaglianza.

Per completezza, si riporta il seguente noto risultato.

LEMMA A.1. *La somma di due funzioni convesse è una funzione convessa.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata: basta scrivere la (A.1) per le due funzioni, sommare membro a membro e raccogliere α e $1 - \alpha$ a secondo membro. $\lhd$

COROLLARIO A.2. *La somma di due funzioni convesse è strettamente convessa se lo è almeno una delle due funzioni.*

LEMMA A.3. *Se $f(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y} \in R^m$, è una funzione convessa (strettamente convessa) e $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \in R^n$ è una m–upla di funzioni lineari, la funzione composita $\varphi(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$ è convessa (strettamente convessa).*

Dimostrazione. La dimostrazione è un'immediata conseguenza della relazione di definizione (A.1). $\lhd$

LEMMA A.4. *Se* $f(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y} \in R^m$, *è una funzione convessa (strettamente convessa) che soddisfa la relazione*

$$f(\boldsymbol{y}') \leq f(\boldsymbol{y}'') \qquad \textit{per ogni} \quad \boldsymbol{y}' \leq \boldsymbol{y}'' \tag{A.2}$$

e $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in R^n$, *è un'm-upla di funzioni convesse, la funzione composita* $\varphi(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$ *è convessa (strettamente convessa).*

Dimostrazione. Assunti due punti $[\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}''] \in R^n$, per la convessità delle componenti della funzione vettore $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, è

$$\boldsymbol{g}(\alpha\boldsymbol{x}' + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}'') \leq \alpha\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}') + (1-\alpha)\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}'') \qquad 0 \leq \alpha \leq 1 .$$

Tale relazione, unita alla (A.2), consente di scrivere

$$\varphi(\alpha\boldsymbol{x}' + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}'') = f(\boldsymbol{g}(\alpha\boldsymbol{x}' + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}'')) \leq f(\alpha\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}') + (1-\alpha)\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}'')) . \tag{A.3}$$

D'altronde per la convessità della $f(\boldsymbol{y})$ risulta

$$f(\alpha\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}') + (1-\alpha)\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}'')) \leq \alpha f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}')) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}'')) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}') + (1-\alpha)\,\varphi(\boldsymbol{x}'') . \tag{A.4}$$

Combinando le (A.3) e (A.4) si prova la convessità della funzione composita. ◁

LEMMA A.5. *Dati una funzioue convessa (strettamente convessa)* $f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$, $\boldsymbol{x}_1 \in R^p$, $\boldsymbol{x}_2 \in R^q$, *e un insieme convesso e chiuso* $\mathfrak{G} \subseteq R^{p+q}$, *la funzione*

$$f_0(\boldsymbol{x}_1) = \min_{\boldsymbol{x}_2 \in \mathfrak{G}_1(\boldsymbol{x}_1)} f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) ,$$

in cui è

$$\mathfrak{G}_1(\boldsymbol{x}_1) = \{\boldsymbol{x}_2 : [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2] \in \mathfrak{G}\} ,$$

è convessa (strettamente convessa).

Dimostrazione. Il dominio di definizione $\mathfrak{S}$ della funzione $f_0(\boldsymbol{x}_1)$ è il luogo dei punti $\boldsymbol{x}_1$ per i quali esiste almeno un valore di $\boldsymbol{x}_2$ tale che il punto $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]$ appartenga a $\mathfrak{G}$. L'insieme $\mathfrak{S}$ è convesso, in quanto proiezione di un insieme convesso.

Fissati in $\mathfrak{S}$ due punti arbitrari, $\boldsymbol{x}_1'$, $\boldsymbol{x}_1''$, si può scrivere

$$f_0(\alpha\boldsymbol{x}' + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}'') = \min_{\boldsymbol{x}_2 \in \mathfrak{G}_1(\alpha\boldsymbol{x}_1' + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_1'')} f(\alpha\boldsymbol{x}_1' + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}_1'', \boldsymbol{x}_2) . \tag{A.5}$$

Si indicano con $\boldsymbol{x}_2'$, $\boldsymbol{x}_2''$ valori corrispondenti al minimo sopra indicato per $\alpha = 1$ e $\alpha = 0$ rispettivamente; evidentemente sarà $[\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2'], [\boldsymbol{x}_1'', \boldsymbol{x}_2''] \in \mathfrak{G}$.

Per la convessità dell'insieme $\mathfrak{X}$, il punto $[\alpha \boldsymbol{x}_1' + (1 - \alpha) \boldsymbol{x}_1'', \alpha \boldsymbol{x}_2' + (1 - \alpha) \boldsymbol{x}_2'']$ appartiene pure a $\mathfrak{X}$. Il minimo indicato nella (A. 5) è maggiorato dal valore che la funzione $f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ assume in tale punto, ossia è

$$\min_{\boldsymbol{x}_2 \in \mathfrak{X}_1(\alpha \boldsymbol{x}_1' + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_1'')} f(\alpha \boldsymbol{x}_1' + (1 - \alpha) \boldsymbol{x}_1'', \boldsymbol{x}_2) \leq f(\alpha \boldsymbol{x}_1' + (1 - \alpha) \boldsymbol{x}_1'', \alpha \boldsymbol{x}_2' + (1 - \alpha) \boldsymbol{x}_2'') . \tag{A.6}$$

D'altronde la convessità della $f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ implica la relazione

$$f(\alpha \boldsymbol{x}_1' + (1 - \alpha) \boldsymbol{x}_1'', \alpha \boldsymbol{x}_2' + (1 - \alpha) \boldsymbol{x}_2'') \leq \alpha f(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2') + (1 - \alpha) f(\boldsymbol{x}_1'', \boldsymbol{x}_2'') = \alpha f_0(\boldsymbol{x}_1') + (1 - \alpha) f_0(\boldsymbol{x}_1'') . \tag{A.7}$$

Le (A.5), (A.6), (A.7) costituiscono una catena di disuguaglianze dalle quali si deduce immediatamente la validità dell'asserto. $\lhd$

SIMBOLI

$\boldsymbol{a}$	vettore;
R^n	spazio vettoriale delle n-uple di numeri reali;
$\boldsymbol{A}$	matrice;
$\mathfrak{X}$	sottospazio di R^n;
$\in$	appartenente a;
$\subseteq$	contenuto in;
$\lhd$	termine della discussione o della dimostrazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. W. KUHN e A. W. TUCKER, *Nonlinear programming*, « Proceedings of the 2-nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability », University of California Press, Berkeley, 481–492 (1951).

[2] P. WOLFE, *Computational techniques for nonlinear programs*, « Princeton University Conference on Linear Programming » (1957).

[3] P. WOLFE, *Recent development in non-linear programming*, The RAND Corporation Santa Monica, P-2063 (1960).

[4] J. B. ROSEN, *Optimal control and convex programming*, « Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Control Theory and Applications », Yorktown Heights, N.Y., 223–237 (1964).

[5] G. B. DANTZIG, *Linear control processes and mathematical programming*, « Journal SIAM on Control », *4* (1) (1966).

[6] H. C. TORNG, *Optimization of discrete control systems through linear programming*, « Journal of the Franklin Institute », *278* (1), 28–44 (1964).

[7] E. B. LEE, *A sufficient condition in the theory of optimal control*, « Journal SIAM on Control », *1* (3), 241–245 (1963).

[8] E. B. LEE, *Linear optimal control problems with isoperimetric constraints*, « IEEE Transactions », *AC-12* (1), 87–90 (1967).

[9] Y. C. HO, *A successive approximation technique for optimal control systems subject to input saturation*, « Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering », *84* (1), 33–40 (1962).

[10] J. B. ROSEN, *Iterative solution of nonlinear optimal control problems*, « Journal SIAM on Control », *4* (1), 223-244 (1966).

[11] E. G. GILBERT, *An iterative procedure for computing the minimum of a quadratic form on a convex set*, « Journal SIAM on Control », *4* (1), 61-80 (1966).

[12] R. O. BARR, *Computation of optimal controls on convex reachable sets*, « Mathematical Theory of Control », Academic Press, New York, 63-70 (1967).

[13] R. O. BARR e E. G. GILBERT, *Some iterative procedures for computing optimal controls*, « Proceedings of the 3-rd IFAC Symposium », London 1966.

[14] R. O. BARR e E. G. GILBERT, *Some efficient algorithms for a class of abstract optimization problems arising in optimal control*, « IEEE Transactions », *AC-14* (6), 640-652 (1969).

[15] G. MARRO e R. ROSSI, *Sulla ottimizzazione dei sistemi discreti*. Parte I: *Sistemi lineari con vincoli convessi*, « Calcolo », *4* (3) (1967).

[16] G. MARRO e R. ROSSI, *Sulla ottimizzazione dei sistemi discreti*. Parte II: *Sistemi non lineari*, « Calcolo », *4* (4) (1967).

[17] B. BERNHOLTZ e L. J. GRAHAM, *Hydrothermal economic scheduling*. Part I: *Solution by incremental dynamic programming*, « AIEE Transactions », part. III, *79*, 921-931 (1960).

[18] B. BERNHOLTZ e L. J. GRAHAM, *Hydrothermal economic scheduling*. Part II: *Extension of the basic theory*, « AIEE Transactions », part III, *80*, 1089-1096 (1962).

[19] B. BERNHOLTZ e L. J. GRAHAM, *Hydrothermal economic scheduling*. Part III: *Scheduling the thermal subsystem using constrained steepest descent*, « AIEE Transactions », part III, *80*, 1096-1105 (1962).

[20] B. BERNHOLTZ e L. J. GRAHAM, *Hydrothermal economic scheduling*. Part IV: *A continuous procedure for maximizing the weighted output of a hydrolectric generating station*, « AIEE Transactions », part III, *80*, 1105-1107 (1962).