
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GEORGES LE CALVÉ, RADU THEODORESCU

**Systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes à
temps continu. Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 54 (1973), n.4, p. 577–583.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_4_577_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Calcolo delle probabilità. — *Systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes à temps continu.* Nota II di GEORGES LE CALVE (*) e RADU THEODORESCU, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si continua lo studio dei sistemi aleatori generalizzati con vincoli completi di tempo continuo iniziato nella Nota I ⁽¹⁾ la cui lettura è necessaria per la comprensione del presente lavoro.

On continue l'étude des systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes à temps continu, commencée dans la Note I ⁽¹⁾, dont la lecture préalable est indispensable pour la compréhension du présent travail.

4. CAS PARTICULIERS ET APPARENTÉS

4.1. Examinons d'abord quelques cas particuliers.

(a) Supposons que $T = N = \{0, 1, \dots\}$. Pour tout $n \in N$ nous nous donnons une probabilité de transition ${}^n\Pi$ de $({}^nW \times {}^nX, {}^n\mathfrak{V} \otimes {}^n\mathfrak{X})$ dans $({}^{n+1}W, {}^{n+1}\mathfrak{V})$ et une probabilité de transition nP de $({}^nW, {}^n\mathfrak{V})$ dans $({}^nX, {}^n\mathfrak{X})$. Nous définissons ${}^n\Pi^{m+1}$ et ${}^nP^m$ pour tout $m \geq n$ par récurrence:

$${}^n\Pi^{n+1}((w, x); A) = {}^n\Pi((w, x); A),$$

et

$${}^n\Pi^{m+2}((w, x); A) = \int_{{}^{m+1}W} {}^n\Pi^{m+1}((w, x); dw') {}^{m+1}P(w'; dx) {}^{m+1}\Pi((w', x'); A),$$

ainsi que

$${}^nP^n(w; B) = {}^nP(w; B),$$

et

$${}^nP^{m+1}(w; B) = \int_{{}^nX \times {}^{n+1}W} {}^nP(w; dx) {}^n\Pi((w, x); dw') {}^{n+1}P^{m+1}(w'; B).$$

Il est clair que ${}^n\Pi^{m+1}$ et ${}^nP^m$ définies de cette manière vérifient (1.1) et (1.2) et que $\{({}^nW, {}^n\mathfrak{V}), ({}^nX, {}^n\mathfrak{X}), {}^n\Pi^{m+1}, {}^nP^m, n, m \in N, n \leq m\}$ est un s.a.g.l.c. à temps discret au sens de la définition 1.1 [4], p. 19, bien que dans cette

(*) Recherche supportée par la subvention A-7223 du Conseil National de Recherche du Canada.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1973.

(1) Voir « Rend. Acc. Naz. Lincei », 54, 434-440 (1970).

définition nous avons pris pour simplifier $({}^nW, {}^n\mathfrak{V}) = (W, \mathfrak{V})$ et $({}^nX, {}^n\mathfrak{X}) = (X, \mathfrak{X})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Supposons que, dans le cas particulier précédent, ${}^n\Pi$ soit définie de la manière suivante: pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une application mesurable nu de ${}^nW \times {}^nX$ dans ${}^{n+1}W$ telle que ${}^n\Pi((w, x); A) = \delta({}^nu(w, x); A)$, où $\delta(w; A)$ est la mesure de probabilité ponctuelle concentrée en w . Alors $\{({}^nW, {}^n\mathfrak{V}), ({}^nX, {}^n\mathfrak{X}), {}^n\Pi^{m+1}, {}^nP^m, n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$ est un s.a.l.c. à temps discret au sens de la définition 2.1.1 [3], p. 63.

(c) Prenons $({}^tW, {}^t\mathfrak{V}) = ({}^tX, {}^t\mathfrak{X})$ et ${}^tP(w; B) = \delta(w; B)$ pour tout $t \in T$. Alors (1.7) nous donne ${}^tP^s(w; A) = {}^tQ^s(w; A)$; il s'ensuit alors que le processus observable est donc de Markov, puisque ${}^tQ^s$ l'est aussi. Comme, de plus, le processus observable et le processus non observable ont même probabilité initiale, ce sont deux versions du même processus aléatoire.

Une autre façon de rendre le processus observable de Markov est de supposer que ${}^t\Pi^s$ ne dépend pas de $w \in {}^tW$ ce qui entraîne que ${}^t\tilde{P}_w^s$ ne dépend pas de $w \in {}^tW$ et que (1.11) se réduit à la relation de Chapman-Kolmogorov.

(d) Supposons que, pour tout $t \in T$, il existe une application mesurable tv de tW dans tX telle que ${}^tP(w; B) = \delta({}^tv(w); B)$. Soit d'autre part ${}^t\Pi^s$ une probabilité de transition vérifiant (1.1). Il est clair que, sous ces conditions, ${}^tQ^s(w; A) = {}^t\Pi^s((w, {}^tv(w)); A)$ et que $x_t = {}^tv(w_t)$ presque sûrement. On peut donc considérer également les fonctions de processus de Markov comme des cas particuliers des s.a.g.l.c.

4.2. Considérons maintenant deux cas apparentés.

(a) L'idée qui sous-tend le modèle à temps continu décrit par O. Onicescu dans [6] pourrait se résumer dans nos termes de la manière suivante. Soient $T = [0, \infty)$, ${}^tX = X$ et ${}^tW = W$ pour tout $t \in T$, où $X = \{x_1, \dots, x_{m+1}\}$, $m \geq 1$, et W est l'espace des vecteurs de probabilités w sur X . Dans ce cas $\mathfrak{X}$ est l'ensemble de toutes les parties de X et $\mathfrak{V}$ est la σ -algèbre des boréliens qui correspond à W . La probabilité de transition ${}^tP^s(w; B)$ est engendré par ${}^tP^t(w; B) = w(B)$ à l'aide d'une relation analogue à (1.2). Puis la probabilité de transition ${}^t\Pi^s((w, x); A)$ est engendrée par ${}^t\Pi^{t+\Delta t}((w, x); A)$ à l'aide d'une relation analogue à (1.1), en admettant que, pour l'infiniment petit Δt , ${}^t\Pi^{t+\Delta t}((w, x); A) = \delta({}^tu^{t+\Delta t}(w, x); A)$, où ${}^tu^{t+\Delta t}$ est une application mesurable de $W \times X$ dans W .

(b) Le lien entre les s.a.g.l.c. à temps continu décrits ici les s.a.l.c. à temps continu décrits par M. Iosifescu en [2] est beaucoup plus complexe. Ils sont cependant apparentés de la façon suivante.

Reprenons nos espaces mesurables $({}^tW, {}^t\mathfrak{V})$ et $({}^tX, {}^t\mathfrak{X})$ pour tout $t \in T$, ainsi que la probabilité de transition ${}^tP^s$, et soit ${}^t\Pi^s$ une probabilité de transition de $({}^tW \times {}^sX, {}^t\mathfrak{V} \otimes {}^s\mathfrak{X})$ dans $({}^sW, {}^s\mathfrak{V})$. Si nous supposons que:

1) il existe deux espaces W et X tels que pour tout $t \in T$ l'on ait ${}^tW = W$ et ${}^tX = \times_{0 < \alpha \leq t} X_\alpha$, $X_\alpha = X$ pour tout $0 < \alpha \leq t$;

2) il existe une application mesurable ${}^t\bar{u}^s$ de ${}^tW \times {}^sX$ dans sW telle que l'on ait ${}^t\Pi^s((w, x); A) = \delta({}^t\bar{u}^s(w, x); A)$, alors le « pseudo » s.a.g.l.c. $\{({}^tW, {}^t\mathfrak{Q}^t), ({}^tX, {}^t\mathfrak{C}), {}^t\Pi^s, {}^tP^s, t, s \in T, t \leq s\}$ se réduit au s.a.l.c. défini en [2].

5. PROBABILITÉS DE TRANSITIONS PERMANENTS DISCONTINUES

5.1. Soient $(L, \mathfrak{Q})$ et $(M, \mathfrak{M})$ deux espaces mesurables et ${}^tK^s$ une probabilité de transition de $(L, \mathfrak{Q})$ dans $(M, \mathfrak{M})$ pour $t, s \in T, t \leq s$.

DÉFINITION 5.1. — La probabilité de transition ${}^tK^s$ est appelée permanente discontinue si les trois conditions suivantes sont vérifiées: (j) ${}^tK^t(l; E) = K(l; E)$ pour tout $t \in T$; (jj) la limite $\lim_{s \downarrow t} ({}^tK^s(l; E) - K(l; E))/s - t = k(t, l; E)$ existe et est uniforme par rapport à $t \in T, l \in L$ et $E \in \mathfrak{M}$; (jjj) $k(t, l; E)$ est uniformément continue en $t \in T$ par rapport à $l \in L$ et $E \in \mathfrak{M}$.

Il est clair que (j) et (jj) ci-dessus entraînent que

$$(5.1) \quad \lim_{s \downarrow t} {}^tK^s(l; E) = K(l; E) = \lim_{t \uparrow s} {}^tK^s(l; E),$$

autrement dit, la continuité de ${}^tK^s$ en t au point $t = s$. D'autre part

$$\left(\frac{\partial {}^tK^s(l; E)}{\partial t} \right)_{t=s} = - \left(\frac{\partial {}^tK^s(l; E)}{\partial s} \right)_{s=t} = -k(t, l; E).$$

De même, puisque $k(t, l; E)$ est une mesure signée sur $\mathfrak{M}$, on peut, en désignant par k^- et k^+ respectivement la partie négative et la partie positive de k , écrire

$$k(t, l; E) = -k^-(t, l; E) + k^+(t, l; E)$$

et donc

$${}^tK^s(l; E) = K(l; E) - (s - t)k^-(t, l; E) + (s - t)k^+(t, l; E) + o(s - t).$$

Un cas particulier important est celui où $(L, \mathfrak{Q}) = (M, \mathfrak{M})$ et où les points isolés appartiennent à $\mathfrak{Q}$. k^- et k^+ sont alors telles qu'il existe deux fonctions k_1 et k_2 avec

$$k_1(t, l) = k(t, l; \{l\}) \quad , \quad k_2(t, l; E) = k^+(t, l; E)/k_1(t, l)$$

de façon que

$$(5.2) \quad k(t, l; E) = -k_1(t, l) \delta(l; E) + k_1(t, l) k_2(t, l; E)$$

et donc

$$(5.3) \quad {}^tK^s(l; E) = K(l; E) - (s - t)k_1(t, l) \delta(l; E) + (s - t)k_1(t, l) k_2(t, l; E) + o(s - t).$$

Soient ensuite $(A, \mathfrak{A})$, $(B, \mathfrak{B})$ et $(C, \mathfrak{C})$ trois espaces mesurables, ${}^tF^s$ une probabilité de transition de $(A, \mathfrak{A})$ dans $(C, \mathfrak{C})$, pour tout $t, s \in T$, $t \leq s$, ${}^tG^s$ une probabilité de transition de $(A, \mathfrak{A})$ dans $(B, \mathfrak{B})$ pour tout $t, s \in T$, $t \leq s$, et ${}^tH^s$ une probabilité de transition de $(B, \mathfrak{B})$ dans $(C, \mathfrak{C})$ pour tout $t, s \in T$, $t \leq s$. Supposons de plus que la relation de compatibilité suivante soit vérifiée:

$$(5.4) \quad {}^tF^s(a; Z) = \int_B {}^tG^r(a; db) {}^rH^s(b; Z)$$

pour tout $t < r < s$.

LEMME 5.2. - Si ${}^tG^s$ est permanente discontinue, si ${}^tH^s$ est continue à droite en t , alors (5.4) est vérifiée pour $t \leq r < s$ et nous avons la relation

$$(5.5) \quad \frac{\partial {}^tF^s(a; Z)}{\partial t} = - \int_B g(t, a; db) {}^tH^s(b; Z)$$

pour tout $t < s$; ici $g(t, a; Y)$ est la fonction qui correspond à $k(t, l; E)$ dans la Définition 5.1 si nous prenons ${}^tG^s$ au lieu de ${}^tK^s$.

Démonstration. - Elle se fait en deux étapes, en considérant d'abord la dérivée à droite de ${}^tF^s$ en t , puis sa dérivée à gauche. La relation (5.4) et les conditions (j), (jj), (jjj), Définition 5.1, écrites pour ${}^tG^s$, entraînent alors le résultat.

De même, nous obtenons le

LEMME 5.3. - Si ${}^tH^s$ est permanente discontinue, si ${}^tG^s$ est continue à gauche en s , alors (5.4) est vérifiée pour $t < r \leq s$ et nous avons la relation

$$(5.6) \quad \frac{\partial {}^tF^s(a; Z)}{\partial s} = \int_B {}^tG^s(a; db) h(s, b; Z)$$

pour tout $s > t$; ici $h(t, b; Z)$ est la fonction qui correspond à $k(t, l; E)$ dans la Définition 5.1 si nous prenons ${}^tH^s$ au lieu de ${}^tK^s$.

Notons aussi que si dans la Définition 5.1 nous supprimons la condition (j), il est encore possible d'obtenir des relations analogues (5.5) et (5.6) contenant les dérivées à droite et à gauche de ${}^tF^s$. Nous pouvons en fait montrer que

$$\left(\frac{\partial {}^tF^s(a; Z)}{\partial t} \right)_{t=t_0} = \int_B \left[\left(\frac{\partial {}^tG^t(a; db)}{\partial t} \right)_{t=t_0} - \left(\frac{\partial {}^{t_0}G^t(a; db)}{\partial t} \right)_{t=t_0} \right] {}^{t_0}H^s(b; Z)$$

et

$$\left(\frac{\partial {}^tF^s(a; Z)}{\partial t} \right)_{t=t_0} = \int_B \left(\frac{\partial {}^tG^{t_0}(a; db)}{\partial t} \right)_{t=t_0} {}^{t_0}H^s(b; Z),$$

et des relations analogues quant à la dérivabilité en s .

5.2. Supposons par la suite que $({}^tW, {}^t\mathfrak{W}) = (W, \mathfrak{W})$ et $({}^tX, {}^t\mathfrak{X}) = (X, \mathfrak{X})$ pour tout $t \in T$. Avant d'examiner quelques cas particuliers de (5.4) et (5.5), essayons de voir le lien qui existe, quant à la propriété d'être permanente discontinue, entre les différentes probabilité de transition qui nous concernent.

PROPOSITION 5.4. — (a) Si ${}^t\Pi^s$ est permanente discontinue et si ${}^tQ^t = Q$ pour tout $t \in T$, ${}^tQ^s$ l'est aussi. (b) Si ${}^tQ^s$ est permanente discontinue, si ${}^t\Pi^s$ est continue à gauche en t au point $t = s$ et si ${}^t\Pi = \Pi$ pour tout $t \in T$, alors ${}^t\Pi^s$ est permanente discontinue. (c) Si ${}^tQ^s$ est permanente discontinue et si ${}^tP = P$ pour tout $t \in T$, alors ${}^tP^s$ est permanente discontinue.

Démonstration. — Ici, et par la suite, $\pi(t, (w, x); A)$, $p(t, w; B)$ et respectivement $q(t, w; A)$, est la fonction qui correspond à $k(t, l; E)$ dans la Définition 5.1 si nous prenons respectivement ${}^t\Pi^s$, ${}^tP^s$ et ${}^tQ^s$ au lieu de ${}^tK^s$.

(a) Montrons d'abord que si ${}^t\Pi^s$ vérifie la condition (jj), Définition 5.1, alors ${}^tQ^s$ la vérifie également. En effet, intégrons $\pi(t, (w, x); A)$ par rapport à ${}^tP(w; B)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{X}} \lim_{s \downarrow t} {}^tP(w; dx) ({}^t\Pi^s((w, x); A) - \Pi((w, x); A)) / (s - t) = \\ = \int_{\tilde{X}} {}^tP(w; dx) \pi(t, (w, x); A). \end{aligned}$$

Comme tP ne dépend pas de s et que ${}^t\Pi^s$ et Π sont bornées, le premier membre peut donc s'écrire

$$\lim_{s \downarrow t} \int_{\tilde{X}} {}^tP(w; dx) {}^t\Pi^s((w, x); A) - \int_{\tilde{X}} {}^tP(w; dx) \Pi((w, x); A) / (s - t).$$

Il est à noter que (5.1) implique

$$(5.7) \quad \int_{\tilde{X}} {}^tP(w; dx) \Pi((w, x); A) = Q(w; A) \quad (2).$$

Par conséquent, en utilisant (5.7) et (1.4), nous obtenons

$$\lim_{s \downarrow t} ({}^tQ^s(w; A) - Q(w; A)) / (s - t) = \int_{\tilde{X}} {}^tP(w; dx) \pi(t, (w, x); A).$$

Nous avons donc, en plus,

$$(5.8) \quad q(t, w; A) = \int_{\tilde{X}} {}^tP(w; dx) \pi(t, (w, x); A),$$

ce qui implique, entre autre, que si ${}^t\Pi^s$ vérifie (jjj), Définition 5.1, alors ${}^tQ^s$ la vérifie aussi.

(2) $Q(w; A)$ pourrait être égale à $\delta(w; A)$.

(b) Supposons que ${}^tQ^s$ soit permanente discontinue et que ${}^t\Pi^s$ soit continue à gauche en t au point $t = s$. Alors

$$\lim_{s \downarrow t} ({}^tQ^s(w; A) - Q(w; A)) / (s - t) = q(t, w; A)$$

permet d'écrire, pour $r < t$,

$$\begin{aligned} \int_W \lim_{s \downarrow t} {}^r\Pi^t((w, x); dw') ({}^tQ^s(w'; A) - Q(w'; A)) / (s - t) = \\ = \int_W {}^r\Pi^t((w, x); dw') q(t, w'; A). \end{aligned}$$

En utilisant la relation (1.6) et en sortant la limite de sous le signe somme pour les mêmes raisons que précédemment, il vient:

$$\begin{aligned} \lim_{s \downarrow t} ({}^r\Pi^s((w, x); A) - {}^r\Pi^t((w, x); A)) / (s - t) = \\ = \int_W {}^r\Pi^t((w, x); dw') q(t, w'; A). \end{aligned}$$

Faisant alors $r \uparrow t$ et utilisant la continuité à gauche de ${}^t\Pi^s$ en t , nous obtenons (jj), Définition 5.1, pour ${}^t\Pi^s$. Remarquons de plus que

$$(5.9) \quad \pi(t, (w, x); A) = \int_W \Pi((w, x); dw') q(t, w; A)$$

et donc que π vérifie la condition (jjj), Définition 5.1, si q la vérifie.

(c) Supposons que ${}^tQ^s$ soit permanente discontinue et ${}^tP = P$ pour tout $t \in T$. Alors ${}^tP^s$ est permanente discontinue puisqu'il suffit d'écrire que

$${}^tP^s(w; B) - P(w; B) = \int_W ({}^tQ^s(w; dw') - {}^tQ^t(w; dw')) P(w'; B).$$

La démonstration s'achève alors en utilisant la même technique de passage à la limite que dans le cas précédent. De plus, nous avons

$$(5.10) \quad p(t, w; B) = \int_W q(t, w; dw') P(w'; B).$$

Finalement, nous obtenons:

PROPOSITION 5.5. - Si ${}^t\Pi^s$ est permanente discontinue, si ${}^tQ^t = Q$ pour tout $t \in T$ et si ${}^tP = P$ pour tout $t \in T$, alors ${}^t\Pi^s$, ${}^tQ^s$ et ${}^tP^s$ sont permanentes discontinues.

5.3. Considérons quelques cas particuliers qui nous intéressent.

(a) Supposons que $(A, \mathfrak{A}) = (B, \mathfrak{B}) = (C, \mathfrak{C}) = (W, \mathfrak{W})$ et ${}^tF^s = {}^tG^s = {}^tH^s = {}^tQ^s$ pour tout $t, s \in T$, $t \leq s$. Alors (5.4) devient la relation de

Chapman–Kolmogorov (1.5). Si ${}^tQ^s$ est permanente discontinue, alors (5.5) devient *l'équation du passé* (backward) de Kolmogorov–Feller sur ${}^tQ^s$:

$$(5.11) \quad \frac{\partial {}^tQ^s(w; A)}{\partial t} = - \int_W q(t, w; dw') {}^tQ^s(w'; A)$$

pour tout $t < s$, et (5.6) devient *l'équation du futur* (forward) de Kolmogorov–Feller sur ${}^tQ^s$:

$$(5.12) \quad \frac{\partial {}^tQ^s(w; A)}{\partial s} = \int_W {}^tQ^s(w; dw') q(s, w'; A)$$

pour tout $s > t$.

Il est clair que nous pouvons tenir compte dans (5.11) et (5.12) d'une décomposition de q du genre de celle indiquée par (5.2), ou bien utiliser (5.3).

(b) Supposons que $(A, \mathfrak{A}) = (W \times X, \mathfrak{W} \otimes \mathfrak{X})$, $(B, \mathfrak{B}) = (C, \mathfrak{C}) = (W, \mathfrak{W})$, ${}^tF^s = {}^tG^s = {}^t\Pi^s$ et ${}^tH^s = {}^tQ^s$ pour tout $t, s \in T$, $s \leq t$. Alors (5.4) devient la relation (1.6). Si ${}^tQ^s$ est permanente discontinue et si ${}^t\Pi^s$ est continue à gauche, alors (5.6) devient *l'équation du futur* (forward) sur ${}^t\Pi^s$:

$$(5.13) \quad \frac{\partial {}^t\Pi^s((w, x); A)}{\partial s} = \int_W {}^t\Pi^s((w, x); dw') q(s, w'; A)$$

pour tout $s > t$. Si ${}^t\Pi^s$ est permanente discontinue et si ${}^tQ^t = Q$, ${}^tQ^s$ l'est aussi (cfr. Proposition 5.4) et alors (5.5) devient *l'équation du passé* (backward) sur ${}^t\Pi^s$:

$$(5.14) \quad \frac{\partial {}^t\Pi^s((w, x); A)}{\partial t} = - \int_W \pi(t, (w, x); dw') {}^tQ^s(w'; A)$$

pour tout $t < s$.

(c) Supposons que $(A, \mathfrak{A}) = (B, \mathfrak{B}) = (W, \mathfrak{W})$, $(C, \mathfrak{C}) = (X, \mathfrak{X})$, ${}^tF^s = {}^tH^s = {}^tP^s$ et ${}^tG^s = {}^tQ^s$ pour tout $t, s \in T$, $s \leq t$. Alors (5.4) devient la relation (1.7). Si ${}^tQ^s$ est permanente discontinue et si ${}^tP^s$ est continue à droite en t , alors (5.5) devient *l'équation du passé* (backward) sur ${}^tP^s$:

$$(5.15) \quad \frac{\partial {}^tP^s(w; B)}{\partial t} = - \int_W q(t, w; dw') {}^tP^s(w'; B)$$

pour tout $t < s$. Si ${}^tP^s$ est permanente discontinue et si ${}^tQ^s$ est continue à droite en s , alors (5.6) devient *l'équation du futur* (forward) sur ${}^tP^s$:

$$(5.16) \quad \frac{\partial {}^tP^s(w; B)}{\partial s} = \int_W {}^tQ^s(w; dw') p(s, w'; B)$$

pour tout $s > t$.

Il est également possible d'obtenir de telles équations pour ${}^tC^s$ et ${}^t\tilde{P}_w^s$.

Remarquons aussi que dans le cas homogène, l'équation (5.13) coïncide avec l'équation (5.14), de même que (5.15) avec (5.16).