Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sauro Tulipani

Sull'aggiunto del funtore dimenticante tra due classi equazionali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.4, p. 503–508.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_4_503_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Matematica. — *Sull'aggiunto del funtore dimenticante tra due classi equazionali* (*). Nota di SAURO TULIPANI, presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper the following result is proved: let $\mathcal{V}$ be an equational class (variety) of algebras of type τ and let $\mathcal{V}^*$ be an equational class of algebras of type τ^* with $\tau \subseteq \tau^*$ and $\mathrm{Id}(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{Id}(\mathcal{V}^*)$, then the canonical forgetful functor $D : \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}$ admits a left adjoint.

1. NOTAZIONI E PRELIMINARI

Siano τ, τ^*, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}^*$ come sopra.

Siano $\mathcal{P}[X]$ l'insieme dei τ–polinomi e $\mathcal{P}^*[X]$ l'insieme dei τ^*–polinomi costruiti sull'insieme X. Siano poi $\mathcal{L}[X]$, $\mathcal{L}^*[X]$ rispettivamente le algebre libere, relativamente a $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}^*$, su X.

Allora

$$\mathcal{L}[X] = \mathcal{P}[X]/\sim \quad , \quad \mathcal{L}^*[X] = \mathcal{P}^*[X]/\overset{*}{\sim}$$

dove le congruenze $\sim$, $\overset{*}{\sim}$ sono definite da

$$p_1^* \overset{*}{\sim} p_2^* \Longleftrightarrow p_1^* = p_2^* \in \mathrm{Id}(\mathcal{V}^*) \quad , \quad p_1^*, p_2^* \in \mathcal{P}^*[X]$$

$$p_1 \sim p_2 \Longleftrightarrow p_1 = p_2 \in \mathrm{Id}(\mathcal{V}) \quad , \quad p_1, p_2 \in \mathcal{P}[X] .$$

Esiste un τ–monomorfismo $m : \mathcal{P}[X] \rightarrowtail \mathcal{P}^*[X]$ e, siccome sull'immagine di m risulta $\sim \leq \overset{*}{\sim}$ perché $\mathrm{Id}(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{Id}(\mathcal{V}^*)$, esiste anche un τ–omomorfismo $d : \mathcal{L}[X] \to \mathcal{L}^*[X]$ definito da:

$$d[p] = [m(p)]_* \qquad p \in \mathcal{P}[X]$$

dove [ ], $[\ ]_*$ indicano le classi di congruenza rispetto a $\sim$ e $\overset{*}{\sim}$ di p e $m(p)$ rispettivamente. Siccome m può esser considerato un'inclusione d'ora in poi sarà omesso.

2. DEFINIZIONE DEL FUNTORE $F : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ SUGLI OGGETTI

Sia $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}$ e costruiamo nel modo che segue un $\mathfrak{A}^* \in \mathcal{V}^*$.

$\mathfrak{A}$ è un quoziente in modo canonico di $\mathcal{L}[A]$ cioè esiste $\varphi : \mathcal{L}[A] \twoheadrightarrow \mathfrak{A}$ tale che se $p \in \mathcal{P}[A]$ $p = p(a)$, $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ allora: $\varphi[p] = {}^{\mathfrak{A}}p(a) \in A$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1973.

dove ${}^{\mathfrak{A}}p$ è l'interpretazione del simbolo polinomiale p in $\mathfrak{A}$, (A sostegno di $\mathfrak{A}$). Sia $\Theta = \ker \varphi \vee \ker d$ e sia Θ_1 la proiezione di Θ sull'immagine di d e cioè se $x, y \in d\mathfrak{L}[A] \subseteq \mathfrak{L}^*[A]$ allora $x = d[p]$, $y = d[q]$, $p, q \in \mathfrak{F}[A]$ e $x \equiv y\,(\Theta_1)$ sse $[p] \equiv [q]\,(\Theta)$, la definizione è ben data perché $\Theta \geq \ker d$.

Sia Θ^* la congruenza di $\mathfrak{L}^*[A]$ definita da:

$$\Theta^* = \cap \{\Phi : \Phi \text{ è una congruenza di } \mathfrak{L}^*[A],\ \Phi \supseteq \Theta_1\}.$$

Sia $\psi = \operatorname{nat} \Theta^*$ (l'applicazione naturale di $\mathfrak{L}^*[A]$ sul quoziente con Θ^*). Indicando $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{L}^*[A]/\Theta^*$ si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\text{(1)}\qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{L}[A] & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathfrak{A} \\ \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle l} \\ \mathfrak{L}^*[A] & \xrightarrow{\ \psi\ } & \mathfrak{A}^* \end{array}$$

l è definito da $l(a) = \psi(a)$ (si fa confusione tra gli elementi di A e i generatori di $\mathfrak{L}[A]$ e $\mathfrak{L}^*[A]$); le congruenze $\sim$, $\overset{*}{\sim}$ di $\mathfrak{F}[A]$ e $\mathfrak{F}^*[A]$ sono discrete sui generatori e allora si può scrivere addirittura a invece di $[a]$ e $[a]_*$.

Verifichiamo che il diagramma (1) è commutativo e cioè

$$\psi d = l\varphi .$$

Se $p(a) \in \mathfrak{F}[A]$

$$l\varphi\,[p] = l\,{}^{\mathfrak{A}}p(a) = \psi\,{}^{\mathfrak{A}}p(a) = \psi b \quad , \quad b = {}^{\mathfrak{A}}p\,(a)$$

$$\psi d\,[p] = \psi\,[p]_*$$

basta allora dimostrare che $[p]_* \equiv b\,(\Theta^*)$

$$b = d\,(b) \equiv d\,[p\,(a)]\,(\Theta_1)$$

da cui

$$b \equiv [p\,(a)]_*(\Theta^*)$$

l è un τ-omomorfismo infatti se f è un'operazione di arietà n e $a \in A^n$:

$$l\,({}^{\mathfrak{A}}f\,(a)) = l\varphi\,([f\,(a)]) = \psi d\,[f\,(a)] = \psi\,[f(a)]_* = {}^{\mathfrak{A}^*}f\psi\,[a]_* = {}^{\mathfrak{A}^*}f\,(l\,(a)) .$$

Si definisca $F : \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{V}^*\ F(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^*$.

3. DEFINIZIONE DEL FUNTORE SUI MORFISMI

PROPOSIZIONE 1. *Sia* $\mathfrak{B}^* \in \mathfrak{V}^*$ *e sia* $\chi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}^*$ *un* τ*–omomorfismo, allora esiste un unico* $\chi^* : \mathrm{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{B}^*$ *tale che* $\chi^* l = \chi$.

Bisogna dimostrare che è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "l"'] & \mathfrak{B}^* \\
\mathrm{F}(\mathfrak{A}) \arrow[ur, dashed, "\chi^*"] &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

con χ^* τ^*–omomorfismo.

Se $x \in \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ esiste un $p(a) \in \mathfrak{F}^*[\mathrm{A}]$, $a = (a_1, \cdots, a_n)$ tale che $\psi[p(a)]_* = x$; definiamo χ^* nel modo seguente:

$$\chi^*(x) = {}^{\mathfrak{B}^*}p(\psi(a)), \qquad \psi a = (\psi a_1, \cdots, \psi a_n);$$

basta verificare che χ^* è ben definito, dopodiché è ovvio che è un τ^*–omomorfismo ed è anche l'unico che rende commutativo il diagramma (2) infatti ogni altro eventuale coinciderebbe sui generatori di $\mathrm{F}(\mathfrak{A})$. Per questo premettiamo il

LEMMA 1: *Siano* $p(a), q(b) \in \mathfrak{F}[\mathrm{A}]$, *se* $d[p(a)] \equiv d[q(b)]\,(\Theta_1)$, *cioè* $[p(a)]_* \equiv [q(b)]_*(\Theta_1)$ *allora* ${}^{\mathfrak{B}^*}p(\psi(a)) = {}^{\mathfrak{B}^*}q(\psi(b))$.

Se $[p(a)]_* \equiv [q(b)]_*(\Theta_1)$ allora $[p(a)]_* \equiv [q(b)]_*(\ker\varphi \mathrm{V} \ker d)$ cioè esiste una sequenza $p_1(a_1), \cdots, p_r(a_r)$ tale che:

$$[p(a)]_* \equiv [p_1(a_1)]_*(\Phi_1) \equiv \cdots \equiv [q(b)]_*(\Phi_{r+1})$$

con $\Phi_i = \ker\varphi$ oppure $\Phi_i = \ker d$; dimostriamo l'asserto per induzione su r.

Se $r = 0$

$$[p(a)] \equiv [q(b)]\,(\ker\varphi)$$

oppure

$$[p(a)] \equiv [q(b)]\,(\ker d).$$

Nel primo caso $\varphi[p(a)] = \varphi[q(b)]$ da cui ${}^{\mathfrak{A}}p(a) = {}^{\mathfrak{A}}q(b)$, $\chi\,{}^{\mathfrak{A}}p(a) = \chi\,{}^{\mathfrak{A}}q(b)$ onde ${}^{\mathfrak{B}^*}p(\chi(a)) = {}^{\mathfrak{B}^*}q(\chi(b))$ (χ è un τ–omomorfismo).

Nel secondo caso $[p(a)]_* = [q(b)]_*$ cioè $p(a) = q(b) \in \mathrm{Id}(\mathfrak{V}^*)$ da cui ${}^{\mathfrak{B}^*}p(\psi a) = {}^{\mathfrak{B}^*}q(\psi b)$.

Se $r > 0$ l'asserto segue dall'ipotesi di induzione spezzando in due la sequenza.

Dimostriamo la proposizione 1.

Sia ora

$$[u(a)]_* \quad , \quad [v(b)]_* \in \mathfrak{L}^*[A]$$

con

$$\psi[u(a)]_* = \psi[v(b)]_*,$$

verifichiamo che

$$^{\mathfrak{B}^*}u(\chi(a)) = {}^{\mathfrak{B}^*}v(\chi(b)).$$

Θ^* è una congruenza generata da Θ_1 quindi esiste una sequenza di funzioni algebriche di $\mathfrak{L}^*[A]$ (per semplicità possiamo supporre una sola funzione) tale che se

$$x = [u(a)]_* \quad , \quad y = [v(a)]_*$$

$$x = {}^{\mathfrak{L}^*}f(x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_s, z_1 \cdots z_t)$$

$$^{\mathfrak{L}^*}f(y_1, \cdots, y_s, x_1, \cdots, x_s, z_1, \cdots, z_t) = y$$

dove

$$x_i = y_i(\Theta_1) \qquad i = 1 \cdots s$$

$$x_i = [p_i(a_i)]_* \quad , \quad p_i(a_i) \in \mathfrak{F}[A]$$

$$y_i = [q_i(b_i)]_* \quad , \quad q_i(a_i) \in \mathfrak{F}[A]$$

$$z_j = [m_j(c_j)]_* \quad , \quad m_j(c_j) \in \mathfrak{F}^*[A]$$

$$i = 1, \cdots, s \quad ; \quad j = 1, \cdots, t$$

allora

$$\chi^* x = {}^{\mathfrak{B}^*}f({}^{\mathfrak{B}^*}p_1(a_1), \cdots {}^{\mathfrak{B}^*}p_s(a_s), {}^{\mathfrak{B}^*}q_1(b_1) \cdots {}^{\mathfrak{B}^*}m_1(c_1) \cdots)$$

$$\chi^* y = {}^{\mathfrak{B}^*}f({}^{\mathfrak{B}^*}q_1(b_1) \cdots {}^{\mathfrak{B}^*}p_1(a_1) \cdots {}^{\mathfrak{B}^*}m_1(c_1) \cdots)$$

infatti essendo

$$[u(a)]_* = {}^{\mathfrak{L}^*}f([p_1]_* \cdots) = [f(p_1 \cdots)]_* \; u(a) = f(p_1 \cdots) \in \mathrm{Id}(\mathfrak{V}^*)$$

analogamente $u(b) = f(q_1 \cdots) \in \mathrm{Id}(\mathfrak{V}^*)$.

Per il Lemma 1 dell'ipotesi $x_i = y_i(\Theta_1)$ segue:

$$^{\mathfrak{B}^*}p_1(a_1) = {}^{\mathfrak{B}^*}q_1(b_1), \cdots {}^{\mathfrak{B}^*}p_s(a_s) = {}^{\mathfrak{B}^*}q_s(b_s)$$

onde $\chi^* x = \chi^* y$.

Sia $\alpha : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ allora si consideri il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_1^* \arrow[rr, dash, "(l_2\,\alpha)^*"] & & \mathcal{A}_2^* \\ \mathcal{A}_1 \arrow[u, "l_1"] \arrow[urr, "l_2\,\alpha"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & \mathcal{A}_2 \arrow[u, "l_2"'] \end{tikzcd}$$

si ponga $F(\alpha) : F(\mathcal{A}_1) \to F(\mathcal{A}_2)$, $F(\alpha) = (l_2\,\alpha)^*$ $((l_2 \cdot \alpha)^*$ è definito mediante la Proposizione 1) F è un funtore infatti se si considera il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_1^* \arrow[r, "F(\alpha)"] & \mathcal{A}_2^* \arrow[r, "F(\beta)"] & \mathcal{A}_3^* \\ \mathcal{A}_1 \arrow[u, "l_1"] \arrow[r, "\alpha"'] & \mathcal{A}_2 \arrow[u, "l_2"] \arrow[r, "\beta"'] & \mathcal{A}_3 \arrow[u, "l_3"] \end{tikzcd}$$

$$l_2\,\alpha = F(\alpha)\,l_1$$

$$l_3\,\beta = F(\beta)\,l_2$$

$$l_3\,(\beta\alpha) = F(\beta\alpha)\,l_1$$

$$l_3\,\beta\alpha = F(\beta)\,l_2\,\alpha = F(\beta)\,F(\alpha)\,l_1\,.$$

Siccome dalla Proposizione 1 segue che $(l_3\,\beta \cdot \alpha)^*$ è quell'unico morfismo tale che $(l_3\,\beta\alpha)^*\,l_1 = l_3(\beta\alpha)$, segue $F(\beta\alpha) = F(\beta)\,F(\alpha)$ e anche $F(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{A}^*}$.

Vediamo che F è aggiunto sinistro di D; cioè

$$\mathrm{Hom}\,[\mathcal{A}\,,\, D\,(\mathcal{B}^*)] \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}\,[F\,(\mathcal{A})\,,\,\mathcal{B}^*]$$

basta verificare che per ogni $\mathcal{A}$ il funtore $\mathrm{Hom}\,[\mathcal{A}\,,\, D\,(—)]$ è rappresentabile da $F(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^*$ e ciò segue dall'universalità del morfismo $l : \mathcal{A} \to DF(\mathcal{A})$ come asserisce la Proposizione 1.

Osservazione. Sia $\tau = \tau^*$, allora se

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}\,[A] \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{A} \\ \mathcal{L}^*\,[A] \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\psi"'] & \mathcal{A}^* \arrow[u, "l"'] \end{tikzcd}$$

l è suriettiva quindi $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}/_{\ker l}$.

Se Θ è una congruenza di $\mathcal{A}$, tale che $\mathcal{A}/\Theta \in \mathcal{V}$, allora per l'universalità di l, detto $\chi = \operatorname{nat} \Theta$, esiste $\chi^* : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}/\Theta$ tale che:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^* \arrow[r, "\chi^*"] \arrow[d, "l"'] & \mathcal{A}/\Theta \\
\mathcal{A} \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

onde $\Theta \geq \ker l$, per cui:

$$\ker l = \cap \{ \Theta : \text{con } \Theta \text{ congruenza di } \mathcal{A} , \mathcal{A}/\Theta \in \mathcal{V}^* \} .$$

Bibliografia

[1] G. Grätzer, *Universal Algebra*, D. Van Nostrand Company, Inc. (1968).
[2] S. Mac-Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.
[3] H. Schubert, *Kategorien*, Springer-Verlag, 1970.