Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alberto Tognoli

Un teorema di approssimazione relativo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.4, p. 496–502.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_4_496_0>

Matematica. — *Un teorema di approssimazione relativo.* Nota di ALBERTO TOGNOLI (*), presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — Let Ω be an open set of $\mathbf{R}^n$ and $X \subset \Omega$ a real, coherent analytic set. Suppose that $f: \Omega \to \mathbf{R}$ be a C^∞ function such that $f_{|X}$ is analytic. In this paper we want to prove that f may be approached (in sense of Whitney's theorem) by analytic functions $f_n: \Omega \to \mathbf{R}$ such that $f_{n|X} = f_{|X}$.

a) ENUNCIATO DEL TEOREMA PRINCIPALE

Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$, per ogni $q \in \mathbf{N}$ noteremo con $C^q(\Omega)$ $(C_0^q(\Omega))$ l'anello delle funzioni (delle funzioni a supporto compatto) in Ω che possiedono derivate continue fino all'ordine q. Noteremo poi:

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{q \in \mathbf{N}} C^q(\Omega) \quad , \quad C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{q \in \mathbf{N}} C_0^q(\Omega) .$$

Con $C^\omega(\Omega)$ indicheremo l'anello delle funzioni analitiche su Ω.

Sia $f \in C^q(\Omega)$, S un sottoinsieme di Ω, noteremo

$$\|f\|_q^S = \sum_{|\alpha| \leq q} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in S} |D^\alpha f(x)|$$

ove $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ è un multiindice e come al solito

$$\alpha! = \alpha_1! \, \alpha_2! \cdots \alpha_n! \quad , \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdots .$$

Al variare del compatto K e del numero $\varepsilon > 0$ gli insiemi

$$B(K, \varepsilon) = \{f \in C^q(\Omega) \mid \|f\|_q^K < \varepsilon\}$$

formano un sistema fondamentale di intorni della funzione nulla di una topologia metrizzabile rispetto alla quale $C^q(\Omega)$ è uno spazio completo.

Analogo risultato si ha per lo spazio $C^\infty(\Omega)$.

Ricordiamo infine che valgono le relazioni

$$\|f \cdot g\|_m^S < \|f\|_m^S \cdot \|g\|_m^S \quad , \quad \|f + g\|_m^S < \|f\|_m^S + \|g\|_m^S .$$

per ogni $S \subset \Omega$, $f, g \in C^m(\Omega)$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo per le strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1973.

Scopo di questo lavoro è provare il seguente

TEOREMA 1. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbf{R}^n$, X *un insieme analitico reale coerente di* Ω, $f \in C^\infty(\Omega)$ *tale che* $f_{|X}$ *sia analitica. Sia* $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *una successione di compatti tali che* $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, $\bigcup_n K_n = \Omega$. *Sia* $\{n_p\}$ *una successione di interi positivi ed* $\{\varepsilon_p\}$ *una successione di reali positivi.*

In queste ipotesi esiste una funzione analitica $g \in C^\omega(\Omega)$ *tale che*

$$\|f - g\|_{n_p}^{K_{p+1}-K_p} < \varepsilon_p, \qquad p \in \mathbf{N},$$

ed inoltre $f_{|X} = g_{|X}$.

Premettiamo alla dimostrazione del Teorema 1 alcuni Lemmi.

b) LEMMI PRELIMINARI

LEMMA 1. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbf{R}^n$, $X \subset \Omega$ *un insieme analitico reale coerente e* $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *una famiglia di compatti di* Ω *tali che*:

$$\overset{\circ}{K}_n \supset K_{n-1} \quad , \quad \bigcup_n K_n = \Omega .$$

Sia $f \in C^\infty(\Omega)$ *una funzione tale che* $f_{|X} = 0$.

In queste ipotesi esiste un aperto $\tilde{\Omega}$ *di* $\mathbf{C}^n$ *contenente* Ω *e delle funzioni olomorfe* $\{\tilde{g}_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ *definite su* $\tilde{\Omega}$ *tali che*:

i) *le funzioni* $\tilde{g}_i$ *sono reali se ristrette ad* Ω *e si ha* $\tilde{g}_{i|X} = 0$ *per ogni* i.

ii) *esiste una successione di interi positivi* $\nu_1 \leq \nu_2 \cdots \leq \nu_n < \cdots$ *e delle funzioni* $\alpha_i \in C^\infty(\Omega)$, $i \in \mathbf{N}$, *tali che*: $\alpha_{i|K_p} = 0$ *se* $i > \nu_{p+1}$ *ed inoltre* $f(x) = \sum_i \alpha_i(x)\,\tilde{g}_i(x)$, *per ogni* $x \in \Omega$.

Prova. Sia $\tilde{\Omega}$ un aperto di Stein di $\mathbf{C}^n$ che contenga Ω ed in cui sia definito un complessificato $\tilde{X}$ di X (tale intorno esiste, vedi [3]).

Per il Teorema A esistono delle funzioni olomorfe $\{\tilde{g}_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ tali che: le $\tilde{g}_i$ sono nulle su X ed inoltre $\tilde{g}_1, \cdots, \tilde{g}_{\nu_p}$ generano il fascio di ideali $\mathfrak{I}_X$ associato ad X in ogni punto di un intorno W_p di K_p.

Osserviamo che le funzioni $\tilde{g}_i(z) = \tilde{g}_i(z) + \overline{\tilde{g}_i(\bar{z})}$ $i = 1, \cdots, \nu_p$ sono olomorfe, reali su Ω, e generano $\mathfrak{I}_X$ in tutti i punti di W_p. Si può dunque supporre che le $\tilde{g}_i$ siano reali su Ω. Nelle ipotesi in cui ci siamo posti, per un risultato di B. Malgrange ([1]), si ha: se $x_0 \in K_p$ esiste un intorno $U_{x_0} \subset W_p$ e delle funzioni $\alpha_i^{x_0} \in C^\infty(U_{x_0})$, $i = 1, \cdots, \nu_p$ tali che su U_{x_0} risulti:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\nu_p} \alpha_i^{x_0}(x)\,\tilde{g}_i(x).$$

Essendo Ω paracompatto a base numerabile esiste un ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ e delle funzioni $\alpha_i^j \in C^\infty(U_j)$ tali che:

1) esistono degli interi positivi $\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_n \cdots$ tali che

$$W_{p+1} \supset (U_{\sigma_p} \cup U_{\sigma_p+1} \cup \cdots \cup U_{\sigma_{p+1}-1}) \supset L_p = \overline{K_{p+1} - K_p}$$

ed inoltre

$$U_j \cap K_{p-1} = \varnothing \qquad U_j \cap (\Omega - K_{p+2}) = \varnothing \qquad \text{per} \quad \sigma_p \leq j < \sigma_{p+1} .$$

2) per ogni U_j esistono delle funzioni $\alpha_i^j \in C^\infty(U_j)$ tali che su U_j valga

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q_j} \alpha_i^j(x)\, \tilde{g}_i(x)$$

ove $q_j < \nu_{p+1}$ se $\sigma_p \leq j < \sigma_{p+1}$.

Sia ora $\{\rho_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ una partizione dell'unità di classe C^∞ associata al ricoprimento $\{U_j\}_{j \in \mathbf{N}}$.

Si ha per ogni $x \in \Omega$:

$$f(x) = f(x) \cdot \sum_j \rho_j(x) = \sum_j \rho_j(x) \cdot \sum_i \alpha_i^j(x)\, \tilde{g}_i(x) = \sum_{ji} \rho_j(x)\, \alpha_i^j(x)\, \tilde{g}_i(x) =$$

$$= \sum_i \tilde{g}_i(x) \cdot \sum_j \rho_j(x)\, \alpha_i^j(x) = \sum_i \alpha_i(x)\, \tilde{g}_i(x)$$

ove si è posto

$$\alpha_i(x) = \sum_j \rho_j(x)\, \alpha_i^j(x) .$$

Osserviamo che le funzioni $\alpha_i(x)$ sono elementi di $C^\infty(\Omega)$ perché le funzioni ρ_j ed α_i^j sono di classe C^∞ e la famiglia dei supporti delle funzioni ρ_j è localmente finita.

Di più se $i > \nu_{p+1}$ ed $x \in K_p$ si ha: $\rho_j(x)\, \alpha_i^j(x) = 0$ per ogni $j \in \mathbf{N}$.

Infatti se U_j non interseca K_p per definizione $\rho_j(x) = 0$ se U_j interseca K_p deve aversi per costruzione $j < \sigma_{p+1}$. In quest'ultimo caso $\alpha_i^j = 0$ per quanto supposto nel punto 2) (essendo $i > \nu_{p+1}$).

Si è così provato che $\alpha_{i|K_p} = 0$ se $i > \nu_{p+1}$; il Lemma è così dimostrato.

LEMMA 2. *Sia* $f \in C_0^q(\mathbf{R}^n)$, $0 \leq q < \infty$; *per ogni* $\lambda \in]0, +\infty[$ *poniamo*

$$g_\lambda(x) = I_\lambda(f)(x) = c\lambda^{n/2} \cdot \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \exp\left(-\lambda\left((x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\right)\right) dy ,$$

ove $c = \pi^{n/2}$.

Si ha allora:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \| g_\lambda - f \|_q^{\mathbf{R}^n} = 0 .$$

$\left(\text{Si noti che la costante } c \text{ è tale che: } c \cdot \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i^2\right) dx = 1\right)$. Per la dimostrazione di questo Lemma vedasi ad esempio [2], pp. 31–32.

LEMMA 3. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbf{R}^n$, $f \in C^\infty(\Omega)$, $A \subset \Omega$ *un compatto,* $\rho > 0$ *tale che* $B_{2\rho} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(x, A) < 2\rho\}$ *è un compatto di* Ω *su cui la funzione* f *è identicamente nulla.*

Sia U_ρ *un aperto di* $\mathbf{C}^n$ *tale che se* $z \in U_\rho$ *ed* $y \in \Omega - B_{2\rho}$ *allora:*

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2\right) > \rho \quad , \quad z = \{z_i\} \quad , \quad y = \{y_i\} \quad , \quad z_q = x_q + iy_q .$$

Sia $\{K_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *una famiglia di compatti di* Ω *tali che:*

$$\mathring{K}_n \supset K_{n-1} \quad , \quad \Omega = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n \quad , \quad K_0 = \varnothing .$$

Sia $\{n_p\}_{p \in \mathbf{N}}$ *una successione di interi positivi,* $\{\varepsilon_p\}_{p \in \mathbf{N}}$ *una successione di reali positivi ed* $\varepsilon > 0$.

In queste ipotesi esiste una funzione analitica $g \in C^\omega(\Omega)$ *tale che:*

i) g *è restrizione di una funzione olomorfa* $\tilde{g}$ *definita su un intorno di* $\Omega \cup U_\rho$.

ii) *per ogni* p *vale* $\| g - f \|_{n_p}^{K_{p+1} - K_p} < \varepsilon_p$,

iii) $|\tilde{g}(z)| < \varepsilon$ *per ogni* $z \in U_\rho$.

Prova. La dimostrazione è praticamente la stessa di quella del classico Teorema di Whitney (vedi [2]), la riporteremo qui per comodità del lettore.

Supporremo nel seguito $n_p > n_{p-1}$ $\lim n_p = +\infty$ (la cosa è sempre possibile).

Posto $L_p = \overline{K_{p+1} - K_p}$ sia $\varphi_p \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che: φ_p è nulla su un intorno di K_{p-1}, φ_p vale 1 su un intorno di L_p.

Sia $M_p = 1 + \| \varphi_p \|_{n_p}^{\Omega}$ e siano δ_p dei numeri positivi tali che:

$$2\,\delta_{p+1} < \delta_p \, , \ \sum_{q > p} \delta_q M_{q+1} < \frac{1}{4} \varepsilon_p \qquad \text{per ogni } p \in \mathbf{N} .$$

Per ogni $h \in C_0^0(\mathbf{R}^n)$ notiamo:

$$I_\lambda(h)(x) = c\lambda^{n/2} \int_{\mathbf{R}^n} h(y) \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right) dy$$

ove

$$c \cdot \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i^2\right) dx = 1$$

Posto $g_0 = I_{\lambda_0}(\varphi_0 \cdot f)$ per il Lemma 2, se λ_0 è abbastanza grande, si ha:

$$\| g_0 - \varphi_0 f \|_{n_0}^{K_1} < \delta_0 .$$

Si possono allora definire induttivamente dei numeri $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \cdots$ e delle funzioni $g_0, \cdots, g_p \cdots$ ponendo:

$$g_p = \mathrm{I}_{\lambda_p}\left(\varphi_p\left(f - \sum_{i=0}^{p-1} g_i\right)\right).$$

In virtù del Lemma 2 è definita una funzione $l_p(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1})$ tale che se $\lambda_p > l_p(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1})$ risulta:

$$\left\| g_p - \varphi_p\left(f - \sum_{i=0}^{p-1} g_i\right)\right\|_{n_p}^{\mathrm{K}_{p+1}} < \delta_p. \tag{1}$$

Supporremo nel seguito i λ_p siano scelti in modo da verificare la (1). La φ_p è nulla in un intorno di K_{p-1} quindi la (1) implica:

$$\| g_p \|_{n_p}^{\mathrm{K}_{p-1}} < \delta_p. \tag{2}$$

Essendo φ_p eguale ad 1 su un intorno di L_p si ha:

$$\left\| f - \sum_{i=0}^{p} g_i \right\|_{n_p}^{\mathrm{L}_p} < \varepsilon_p. \tag{3}$$

Dalla (1), sostituendo $p+1$ a p si ottiene:

$$\| g_{p+1} \|_{n_p}^{\mathrm{L}_p} < \left\| \varphi_{p+1}\left(f - \sum_{i=0}^{p} g_i\right)\right\|_{n_p}^{\mathrm{L}_p} +$$

$$+ \left\| g_{p+1} - \varphi_{p+1}\left(f - \sum_{i=0}^{p} g_i\right)\right\|_{n_p}^{\mathrm{L}_p} < \mathrm{M}_{p+1}\,\delta_p + \delta_{p+1}$$

che per la (2) da:

$$\| g_{p+1} \|_{n_p}^{\mathrm{K}_{p+1}} < 2\,\delta_p\,\mathrm{M}_{p+1}$$

e quindi:

$$\left\| \sum_{i>p} g_i \right\|_{n_p}^{\mathrm{K}_{p+1}} < 2 \sum_{i>p} \delta_i\,\mathrm{M}_{i+1} < \frac{1}{2}\,\varepsilon_p. \tag{4}$$

La (4) implica che la funzione $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i$ è di classe n_p per ogni n_p e quindi essendosi supposto $\lim_{p\to\infty} n_p = +\infty$ la g è C^∞ (si noti che per costruzione le g_i sono analitiche). Dalla (3) si ha poi:

$$\| f - g \|_{n_p}^{\mathrm{L}_p} < \left\| f - \sum_{0}^{p} g_i \right\|_{n_p}^{\mathrm{L}_p} + \left\| \sum_{i>p} g_i \right\|_{n_p}^{\mathrm{L}_p} \le \delta_p + \frac{1}{2}\,\varepsilon_p < \varepsilon_p. \tag{5}$$

Resta da dimostrare che se si scelgono opportunamente le costanti λ_p intervenute nella precedente costruzione, non solo valgono le (4) e (5) ma la funzione g è restrizione di una funzione olomorfa $\tilde{g}$ definita su un intorno di $\Omega \cup U_\rho$ tale che $|\tilde{g}(z)| < \varepsilon$ se $z \in U_\rho$. Detto $2\rho_p = d(K_p, \Omega - K_{p+1})$ sia U_p un aperto di $\mathbf{C}^n$ tale che: $U_p \supset K_p$ e se $z \in U_p$, $y \in \Omega - K_{p+1}$ allora:

$$\operatorname{Re} \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 > \rho_p .$$

Supponiamo inoltre che $U_{p+1} \supset U_p$ per ogni $p \in \mathbf{N}$.

Per definizione:

$$g_p(x) = c\lambda^{n/2} \int_{\text{supp.}(\varphi_p)} \varphi_p(y) \cdot \left(f(y) - \sum_{i=0}^{p-1} g_i(y)\right) \exp\left(-\lambda_p \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right) dy$$

dette $z_k = x_k + iy_k$ le coordinate di $\mathbf{C}^n$ la g_p risulta restrizione della funzione olomorfa $\tilde{g}_p : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ definita da:

$$\tilde{g}_p(z) = c\lambda^{n/2} \int_{\text{supp.}(\varphi_p)} \varphi_p(y) \cdot \left(f(y) - \sum_{i=0}^{p-1} g_i(y) \exp\left(-\lambda_p \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2\right)\right) dy .$$

Per $q > p + 1$ si ha: $\operatorname{supp} \varphi_q \subset \Omega - K_{p+1}$ e quindi l'integrale che definisce $\tilde{g}_q$ può essere ristretto ad $\Omega - K_{p+1}$. Si ha dunque, per $z \in U_p$:

$$(6) \qquad |\tilde{g}_q(z)| < c\lambda^{n/2} \exp(-\lambda_q \rho_q)\, H_q(\lambda_0, \cdots, \lambda_{q-1})$$

ove $H_q(\lambda_0, \cdots, \lambda_{q-1})$ è una funzione che dipende solo da $\lambda_0, \cdots, \lambda_{q-1}$.

Possiamo ora scegliere induttivamente i λ_p in modo che, oltre a valere le (4) e (5), si abbia:

$$(7) \qquad \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_q^{n/2} H_q(\lambda_0, \cdots, \lambda_{q-1}) \exp(-\lambda_q \rho_q) < +\infty .$$

Con questa scelta dei λ_p la serie $\tilde{g}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{g}_p(z)$ converge uniformemente sui compatti di $U = \bigcup_p U_p$, quindi $\tilde{g}$ è una funzione olomorfa su U che ristretta ad Ω da la funzione analitica g.

Osserviamo infine che, migliorando eventualmente i numeri ε_p ed n_p che definiscono l'approssimazione si possono rinumerare i compatti K_n (eliminando i primi) in modo tale che risulti: $K_1 \supset B_{2\rho}$.

Si può dunque supporre $U_1 \supset U_\rho$ e scegliere, in virtù della (6), i λ_p in modo tale che oltre a valere le (4), (5), (7) risulti anche:

$$(8) \qquad |\tilde{g}_p(z)| < \varepsilon/2^{p+1} \qquad \text{per} \quad z \in U_1 .$$

La funzione olomorfa $\tilde{g} = \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{g}_p$ soddisfa ora a tutte le proprietà richieste. Il Lemma è così provato.

c) LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1

Per il Teorema B esiste una funzione analitica $F : \Omega \to \mathbf{R}$ tale che $F_{|X} = f_{|X}$. Basta evidentemente dimostrare che la funzione $f - F$ è approssimabile su Ω con funzioni analitiche nulle su X, (infatti se le h_n approssimano $f - F$ allora le $h_n + F$ approssimano f).

Possiamo dunque supporre che f sia nulla su X.

Per il Lemma 1 esistono: un intorno $\tilde{\Omega}$ di Ω in $\mathbf{C}^n$, delle funzioni olomorfe $\tilde{g}_i : \tilde{\Omega} \to \mathbf{C}$ nulle su X e delle funzioni $\alpha_i \in C^\infty(\Omega)$ tali che:

$$f(x) = \sum_i \alpha_i(x) g_i(x) \, , \, x \in \Omega \tag{1}$$

ed inoltre $\alpha_{i|K_p} = 0$ se $i > \nu_{p+1}$.

Per il Lemma 3 esistono: degli aperti U_p di $\mathbf{C}^n$ tali che: $U_p \supset K_p$, $U_{p+1} \supset U_p$ e delle funzioni olomorfe $\{\beta_q\}_{q \in \mathbf{N}}$ tali che, se $q > \nu_{p+1}$, β_q è definita su un intorno D_p di $\Omega \cup U_p$ in $\mathbf{C}^n$ e risulta:

1) $|\beta_q(z) \cdot g_q(z)| < \frac{1}{2^{q+1}}$ per ogni $z \in U_p \cap \tilde{\Omega}$;

2) $\left\| \sum_i \beta_i \tilde{g}_i - f \right\|_{n_p}^{L_p} < \varepsilon_p$.

Avendosi $U_p \supset U_{p-1}$ la 1) garantisce che esiste un intorno D di Ω in $\tilde{\Omega}$ tale che su D la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \tilde{g}_i$ converge uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa $\tilde{g} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \tilde{g}_i$.

La 2) ed il fatto che $\tilde{g}_{i|X} = 0$ garantiscono che $g = \tilde{g}_{|\Omega}$ soddisfa alle proprietà richieste dal Teorema 1 che risulta così provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. MALGRANGE, *Sur les fonctions differentiables et les ensembles analytiques*, « Bull. Soc. Math. France », *91*, 113–127 (1963).

[2] R. NARASIMHAN, *Analysis on real and complex manifolds*, Masson et Cie, Paris 1968.

[3] H. CARTAN, *Variétés analytiques reelles et variétés analytiques complexes*, « Bull. Soc. Math. de France », *85*, 77–100 (1957).