Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

George Vranceanu

Sopra le varietà differenziabili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.3, p. 398–401.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_3_398_0>

Geometria. — *Sopra le varietà differenziabili.* Nota di GEORGE VRANCEANU, presentata [*] dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — It is shown how the study of the differentiable manifolds imbedded in a Euclidean space can be based on Levi-Civita's notion of parallelism.

Una varietà differenziabile può essere considerata come un luogo geometrico di uno spazio euclideo secondo il punto di vista di Betti e di Poincaré. D'altra parte si sa che la nozione di parallelismo negli spazi di Riemann, scoperta da Levi-Civita nel 1917 [1], è stata il punto di partenza per lo svolgimento delle geometrie a connesione.

Qui vogliamo far vedere come la nozione di parallelismo ci possa dare un quadro completo per lo studio delle varietà differenziabili.

Supponiamo infatti che nello spazio euclideo $E_N(y^1, \cdots, y^N)$ si abbia una varietà differenziabile, V_n. Se indichiamo con $z^1, \cdots, z^N$ le coordinate in un intorno V di V_n, si hanno delle formule

$$z^a = f^a(x^1, \cdots, x^n) \qquad (a = 1, \cdots, N) \tag{1}$$

dove $x^1, \cdots, x^n$ sono parametri che variano in un certo campo.

Possiamo allora considerare in E_N gli n vettori $\partial f^a / \partial x^i$ $(i = 1, \cdots, n)$ che definiscono il campo dei vettori tangenti a V_n nell'intorno V. Denotando con Y^a_α $(\alpha = n+1, \cdots, N)$, $N - n$ vettori normali a V_n e supponendo che questi vettori siano ortogonali e unitari, si hanno le formule

$$df^a \, Y^a_\alpha = 0 \quad , \quad Y^a_\alpha \, Y^a_\beta = \delta^\alpha_\beta \qquad (\alpha, \beta = n+1, \cdots, N), \tag{2}$$

Y^a_α essendo evidentemente funzione dei parametri $x^1, \cdots, x^n$.

Questo detto, possiamo introdurre in E_N delle coordinate curvilinee $x^1, \cdots, x^n, x^{n+1}, \cdots, x^N$ mediante le formule

$$y^a = f^a(x^1, \cdots, x^n) + x^\alpha \, Y^a_\alpha . \tag{3}$$

Ora la metrica di E_N in tali coordinate curvilinee si scrive

$$d\sigma^2 = ds^2 + 2 \, x^\alpha \, d\varphi_\alpha + 2 \, x^\alpha \, dx^\beta \, \psi_{\alpha\beta} + x^\alpha \, x^\beta \, \varphi_{\alpha\beta} + (dx^\alpha)^2, \tag{4}$$

dove

$$ds^2 = df^a \, df^a = a_{ij} \, dx^i \, dx^j \tag{5}$$

(*) Nella seduta del 10 marzo 1973.

(1) I. LEVI-CIVITA, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione della curvatura della varietà*, « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », *42*, 173–215 (1917). *Opere matematiche*, vol. IV, pp. 1–39.

è la prima forma fondamentale, che definisce la metrica di V_n, e dove

$$(5') \qquad \begin{aligned} \varphi_\alpha &= df^a \, dY^a_\alpha = b_{\alpha ij} \, dx^i \, dx^j \\ \psi_{\alpha\beta} &= dY^a_\alpha \, Y^a_\beta = a_{\alpha\beta i} \, dx^i \end{aligned}$$

sono le seconde forme fondamentali e le forme di torsione. Quanto alle forme quadratiche $\varphi_{\alpha\beta} = dY^a_\alpha \, dY^a_\beta = c_{\alpha\beta ij} \, dx^i \, dx^j$, esse si esprimono con l'aiuto di ds^2, φ_α, $\psi_{\alpha\beta}$.

Supponiamo adesso che nello spazio E_N si abbiano due vettori unitari, di componenti

$$\alpha^1, \cdots, \alpha^N; \qquad v^1, \cdots, v^N.$$

Allora l'angolo θ di questi è dato dalla

$$\cos\theta = \alpha^1 v^1 + \cdots + \alpha^N v^N.$$

Supponendo con Levi-Civita che il primo vettore sia fisso, si ha per una variazione del vettore v

$$-\sin\theta \, d\theta = \alpha^1 dv^1 + \cdots + \alpha^N dv^N.$$

Se per questa variazione θ non varia, dunque $d\theta = 0$, si ha la

$$(6) \qquad \alpha^1 dv^1 + \cdots + \alpha^N dv^N = 0;$$

e tale equazione non può aver luogo per ogni scelta del vettore α che se $dv^a = 0$ $(a = 1, \cdots, N)$, dunque solamente se il vettore v varia restando parallelo a se stesso. Possiamo dunque chiamare (6) l'equazione simbolica del parallelismo, o equazione di Levi-Civita.

Supponiamo ora che tanto per il vettore α quanto per il vettore v siano date le componenti β e V rispetto ai vettori tangenti ed ai vettori normali a V_n. Si ha dunque

$$\alpha^a = \frac{\partial f^a}{\partial x^i} \beta^i + Y^a_\alpha \beta^\alpha,$$

$$v^a = \frac{\partial f^a}{\partial x^i} V^i + Y^a_\alpha V^\alpha,$$

onde l'equazione (6) si scrive

$$(7) \qquad \left(\frac{\partial f^a}{\partial x^i} \beta^i + Y^a_\alpha \beta^\alpha\right)\left(\frac{\partial^2 f^a}{\partial x^j \partial x^k} V^j dx^k + \frac{\partial f^a}{\partial x^j} dV^j + Y^a_\beta dV^\beta + V^\beta dY^a_\beta\right) = 0.$$

Quest'ultima equazione, utilizzando la (5) e supponendola verificata qualunque siano le β^i, β^α, ci dà le equazioni

$$(8) \qquad \begin{aligned} &|jk, i| \, V^j dx^k + a_{ij} dV^j + b_{\alpha ik} V^\alpha dx^k = 0, \\ &- b_{\alpha jk} V^j dx^k - a_{\alpha\beta k} V^\beta dx^k + dV^\alpha = 0, \end{aligned}$$

dove $|jk, i|$ denotano i simboli di Christoffel di prima specie del tensore a_{ij}.

Le (8) rappresentano così le equazioni del parallelismo in E_N nelle coordinate curvilinee $x^1, \cdots, x^n, x^{n+1}, \cdots, x^N$. Come si vede, esse costituiscono un sistema ai differenziali totali nelle $V^1, \cdots, V^n$ e $V^{n+1}, \cdots, V^N$, sistema che deve essere completamente integrabile. Le condizioni d'integrabilità ci dànno le condizioni di rigidità, esprimenti il fatto che la metrica (4) è euclidea (2).

Dunque una prima serie di risultati sono dati da queste condizioni di rigidità, tra cui le più importanti sono le formule di Gauss, che dànno il tensore di curvatura $R_{ij,kl}$ con l'aiuto delle seconde forme fondamentali

$$R_{ij,kl} = b_{\alpha ik}\, b_{\alpha jl} - b_{\alpha il}\, b_{\alpha jk}\,, \tag{8'}$$

Supponiamo infine che si voglia con Levi-Civita che l'equazione del parallelismo (7) sia verificata solamente per i vettori tangenti, dunque quando risulti $\beta^\alpha = V^\alpha = 0$.

In questo caso si ottengono le note equazioni del parallelismo di Levi-Civita che, risolte rispetto a dV^i, si scrivono

$$dV^i = -\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right| V^j\, dx^k \tag{9}$$

dove $\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|$ sono i simboli di Christoffel di seconda specie. Come si sa, tale parallelismo è integrabile solamente se il tensore di curvatura di V_n è nullo. Altrimenti il trasporto parallelo si può fare lungo una curva.

Si esiga da ultimo che la (7) sia verificata solamente per vettori normali, dunque quando sia $\beta^i = V^i = 0$. In questo caso si hanno le equazioni

$$dV^\alpha = a_{\alpha\beta i}\, dx^i\, V^\beta, \tag{9'}$$

e tale parallelismo riesce integrabile se le quantità

$$T_{\alpha\beta ij} = \frac{\partial a_{\alpha\beta i}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{\alpha\beta j}}{\partial x^i} + a_{j\alpha j}\, a_{j\beta i} - a_{j\alpha i}\, a_{j\beta j} \tag{10}$$

sono nulle. In tale ipotesi lo spazio si può chiamare senza torsione e si possono scegliere i vettori normali in modo che le forme di torsione siano nulle, onde allora si ha $dV^\alpha = 0$ nel trasporto parallelo (9'). Osserviamo altresì che le equazioni di rigidità di Ricci-Kuhne attualmente si scrivono

$$T_{\alpha\beta ij} = a^{rs}\left[b_{\alpha is}\, b_{\beta jr} - b_{\alpha js}\, b_{\beta ir}\right], \tag{10'}$$

e sono così analoghe alle (8').

Ne risulta che una varietà V_n in E_N ha due tensori fondamentali, il tensore di curvatura ed il tensore di torsione, legati rispettivamente dal parallelismo nello spazio tangente e dal parallelismo nello spazio normale.

(2) Ved. G. VRANCEANU, *Sulle condizioni di rigidità di una* V_m *in un* S_n, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», *11*, 375–389 (1930).

Un esempio di varietà differenziabile chiusa senza curvatura e senza torsione è il toro T_n, definito come prodotto diretto di n circoli in E_{2n}, dunque dato dalle equazioni

$$y^i = \cos \varphi^i \quad , \quad y^{n+i} = \sin \varphi^i \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{11}$$

dove φ^i sono degli angoli variabili fra 0 e 2π.

Si sa altresì, secondo un teorema di Tompkins, che per una varietà differenziabile V_n chiusa senza curvatura si deve avere $N \geq 2n$.

Riguardo alle varietà senza torsione, secondo un teorema di Cartan esiste un sistema ortogonale di congruenze che sia principale per tutte le seconde forme fondamentali, ossia tale che

$$\begin{aligned} ds^2 &= (ds^1)^2 + \cdots + (ds^n)^2, \\ \varphi_{n+\sigma} &= b_1^\sigma (ds^1)^2 + \cdots + b_n^\sigma (ds^n)^2 \qquad (\sigma = 1, \cdots, p), \end{aligned} \tag{12}$$

$p = N - n$ chiamandosi la codimensione di V_n. Vogliamo osservare che in tal caso i coefficienti di Ricci con quattro indici γ^h_{klr}, che sono come si sa emisimmetrici in h, k; l, r, sono nulli salvo

$$\gamma^h_{khk} = b^\sigma_h b^\sigma_k \qquad (\sigma = 1, \cdots, p). \tag{13}$$

Se per la varietà V_n tutte le facette piane hanno curvatura negativa, dunque tutte le γ^h_{khk} sono negative, la codimensione p deve essere maggiore di $n - 2$, in base al fatto che in uno spazio euclideo E_m non vi sono più di $m + 1$ vettori per i quali i coseni dei loro angoli siano tutti negativi.