Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sur un lemme de convergence et ses applications aux équations aux dérivées partielles d'évolution non linéaires et non monotones. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.3, p. 338–342.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_3_338_0>

Analisi matematica. — *Sur un lemme de convergence et ses applications aux équations aux dérivées partielles d'évolution non linéaires et non monotones.* Nota I di MARCO BIROLI (*), presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si enunciano un lemma di convergenza ed alcuni risultati sulle equazioni alle derivate parziali non lineari e non monotone, che da esso conseguono.

§ 1. INTRODUCTION ET ENONCÉS

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert borné de frontière Γ. Récemment H. Brézis, [4], a démontré le lemme suivant:

LEMME 1. *Soit* β *un graphe maximal monotone de* $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ *avec* $D(\beta) = \mathbf{R}$ *et* $\{v_n(x)\}$ *une suite telle que*

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x) \qquad \textit{dans} \quad \Omega \quad \textit{p.p.}$$

Soit
$$\sigma_n(x) \in \beta(v_n(x)) \qquad \textit{et} \qquad \int_\Omega \sigma_n(x)\, v_n(x)\, dx \leq \text{Cst.}$$

On peut, alors, extraire de $\{\sigma_n(x)\}$ *une sous suite, que nous indiquons encore par* $\{\sigma_n(x)\}$, *telle que*

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \sigma_n(x) = \sigma(x)$$

dans $\mathfrak{L}^1(\Omega)$ *et* $\sigma(x) \in \beta(v(x))$ *p.p. dans* Ω.

Un facil corollaire de ce lemme est le suivant:

COROLLAIRE 1. *Soient* β *et* $\{v_n(x)\}$ *comme au Lemme 1 et indiquons par* $\beta_{1/n}$ *la régularisée de Yoshida de* β, $\sigma_n(x) = \beta_{1/n}(v_n(x))$. *Supposons que*

$$\int_\Omega \sigma_n(x)\, v_n(x)\, dx \leq \text{Cst.}$$

On peut, alors, extraire de $\{\sigma_n(x)\}$ *une sous suite, que nous indiquons encore par* $\{\sigma_n(x)\}$, *telle que*

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \sigma_n(x) = \sigma(x)$$

dans $\mathfrak{L}^1(\Omega)$ *et* $\sigma(x) \in \beta(v(x))$ *p.p. dans* Ω.

(*) Istituto di Matematica dell'Università di Parma. Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1973.

Ce corollaire a permis à H. Brézis, [5], d'obtenir, en supposant β graphe maximal monotone avec $D(\beta) = \mathbf{R}$, des résultats d'existence pour les problèmes suivants:

(I)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \Delta u(t,x) + \beta(u(t,x)) + $$
$$+ \alpha \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \ni f(t,x) \quad \text{p.p.} \quad \text{dans } [0,T]\times\Omega \qquad (\alpha \geq 0)$$
$$u(t,x)|_\Gamma = 0 \quad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad [0,T].$$
$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) \quad \text{p.p.} \quad \text{sur } \Omega.$$

(II)
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) + \beta(u(t,x)) \ni f(t,x) \quad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad [0,T]\times\Omega$$
$$u(t,x)|_\Gamma = 0 \quad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad [0,T]$$
$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad \Omega.$$

(III)
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) \quad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad [0,T]\times\Omega$$
$$-\frac{\partial u}{\partial n}(t,x) \in \beta(u(t,x)) \quad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad [0,T]\times\Gamma$$
$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad \Omega.$$

où n est la normale à Γ extérieure a Ω.

W. Strauss, [10], a obtenu pour (I) un théorème d'existence en supposant $D(\beta) = \mathbf{R}$, $\beta(\eta)$ continue et $\beta(\eta)\eta \geq 0$.

P. Hess, [6], a obtenu pour (II) un théorème d'existence, en supposant $\beta(\eta)$ continue avec une croissance polynomiale et $\beta(\eta)\eta \geq 0$.

Ces deux résultats nous font penser que le Corollaire 1 doit, dans un certain sens, rester valable pour $\beta(\eta)$ continue avec $D(\beta) = \mathbf{R}$ et $\beta(\eta)\eta \geq 0$ ou dans de cas plus générales.

Le but de ce travail est de donner une extension du Corollaire 1 et l'appliquer aux problèmes (I), (II), (III) pour obtenir des résultats, qui améliorent, dans le cas des problèmes (I), (II), ceux de Strauss et Hess.

DÉFINITION 1. *Soit* $\beta(\eta)$ *une fonction multivoque avec* $D(\beta) = \mathbf{R}$; *on dit que* $\beta(\eta)$ *est essentiellement* s.c.s. *dans* $\overline{\eta}$, *si, fixé une voisinage* U *de* $\beta(\overline{\eta})$, *il y a une voisinage* V *de* $\overline{\eta}$, *tel que* $\beta(\eta) \subset U$ *p.p. dans* V.

Soit maintenant $\beta(\eta)$ une fonction multivoque avec $D(\beta) = \mathbf{R}$; nous supposons dans la suite:

(*a*) $\forall \eta$, $\beta(\eta)$ est un interval fermé de $\mathbf{R}$;

(*b*) $\beta(\eta)$ est ess. s.c.s.;

(*c*) $\forall \eta \in \mathbf{R}$, $\psi \in \beta(\eta)$ on a $\psi\eta \geq 0$.

(*d*) $\beta(\eta)$ a une section $g(\eta) \in \mathcal{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$.

Observons qu'une fonction continue définie sur **R**, une fonction monotone définie sur **R** et, plus généralement, une fonction localement à variation bornée sur **R** satisfont (*a*), (*b*) et (*d*).

Considérons une suite $\{\rho_n\}$ croissante, $\rho_n > 1$ et $\lim_{n\to\infty} \rho_n = +\infty$.

Posons

$$\tilde{\tilde{g}}_n(\eta) = \begin{cases} = g(\eta) & \text{dans } [-\rho_n, \rho_n] \\ = x\ (\in \beta(\rho_n)) & \text{dans } (\rho_n, +\infty) \\ = y\ (\in \beta(-\rho_n)) & \text{dans } (-\infty, -\rho_n). \end{cases}$$

Soit $\varphi(\eta) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ avec supp. $\varphi = [-1, 1]$ et

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(\eta)\, d\eta = 1 .$$

Posons

$$g_n(\eta) = n \int_{\mathbf{R}} \tilde{\tilde{g}}(\eta - \tau)\, \varphi(n\tau)\, d\tau = n \int_{-1/n}^{1/n} \tilde{\tilde{g}}(\eta - \tau)\, \varphi(n\tau)\, d\tau .$$

On a alors que $g_n(\eta)$ est lipschitzienne sur **R**.

Nous donnons d'abord un lemme du type du Corollaire 1:

LEMME 2. *Soit* $\{v_n(x)\}$ *une suite, telle que*

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x)$$

p.p. sur Ω; *posons* $\sigma_n(x) = g_n(v_n(x))$ *et soit*

$$\int_{\Omega} \sigma_n(x)\, v_n(x)\, dx \leq \text{Cst.}$$

On peut alors extraire de $\sigma_n(t, x)$ *une sous-suite, que nous indiquons encore par* $\{\sigma_n(x)\}$, *telle que*

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \sigma_n(x) = \sigma(x)$$

dans $\mathfrak{L}^1(\Omega)$ *et* $\sigma(x) \in \beta(v(x))$.

Le Lemme 2 est démontré dans la Note II, § 2; pour démontrer la convergence faible dans $\mathfrak{L}^1(\Omega)$ on utilise les technyques données par H. Brézis pour le Lemme 1 et pour démontrer que $\sigma(x) \in \beta(v(x))$ on utilise des technyques de Amerio–Prouse [1], [2].

Considérons maintenant le problème (I).

Supposons $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ avec $j(u_0(x)) \in \mathfrak{L}^1(\Omega)$ $\left(j(\eta) = \int_0^\eta g(\eta)\, d\eta\right.$; $j(0) = 0)$, $u_1(x) \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$, $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ avec $A = -\Delta$ et considérons la suivante formulation faible de (I)

(I′) $$u''(t) + Au(t) + \alpha u'(t) + \sigma(t) \ni f(t)$$
$$\text{dans } H^{-1}(\Omega) + \mathfrak{L}^1(\Omega) \quad \text{p.p. sur } [0,T] \qquad (\alpha \geq 0)$$
$$u(0) = u_0 \qquad u'(0) = u_1$$
$$u(t) \in E \quad \text{p.p. sur } [0,T]$$
$$\sigma(t,x) \in \mathfrak{L}^1(0,T;\mathfrak{L}^1(\Omega)) \quad , \quad \sigma(t,x) \in \beta(u'(t,x))$$
$$\text{p.p. sur } [0,T]\times\Omega$$

(pour la définition de l'espace E voir [3]).

Dans la Note II, § 3 on démontre le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Soit* $f(t) \in \mathfrak{L}^2(0,T;\mathfrak{L}^2(\Omega))$; *le problème* (I) *a une solution* $u(t) \in \mathfrak{L}^\infty(0,T;E)$.

Passons au problème (II); supposons $u_0(x) \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ et $A: H_0^1(\Omega) \to \to H^{-1}(\Omega)$ comme dans (I′).

Considérons la suivante formulation faible de (II)

(II′) $$u'(t) + Au(t) + \sigma(t) = f(t)$$
$$\text{dans } H^{-1}(\Omega) + \mathfrak{L}^1(\Omega) \qquad \text{p.p. sur } [0,T]$$
$$u(0) = u_0$$
$$\sigma(t,x) \in \mathfrak{L}^1(0,T;\mathfrak{L}^1(\Omega)) \quad , \quad \sigma(t,x) \in \beta(u(t,x))$$
$$\text{p.p. sur } [0,T]\times\Omega.$$

Dans le § 4, Note II on démontre le résultat suivant.

THÉORÈME 2. *Soit* $f(t) \in \mathfrak{L}^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$; *le problème* (II′) *a une solution* $u(t) \in \mathfrak{L}^\infty(0,T:\mathfrak{L}^2(\Omega))$.

Passons au problème (III); supposons $u_0(x) \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ $A: H^1(\Omega) \to \to (H^1(\Omega))^*$ défini par la rélation

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega uv\,dx$$

$\forall u, v \in H^1(\Omega)$.

Considérons la suivante formulation faible de (III)

(III′) $$\langle u'(t) + Au(t), v\rangle + \int_\Gamma \sigma(t,x)\,v(t,x)\,dt\,dx =$$
$$= \langle f(t), v\rangle \quad \forall v \in H^1(\Omega) \cap \mathfrak{L}^\infty(\Gamma)$$
$$u(0) = u_0 (\in \mathfrak{L}^2(\Omega))$$
$$\sigma(t,x) \in \mathfrak{L}^1(0,T;\mathfrak{L}^1(\Gamma)) \quad \sigma(t,x) \in \beta(u(t,x))$$
$$\text{p.p. sur } [0,T]\times\Gamma.$$

On a le résultat suivant:

THÉORÈME 3. *Soit* $f(t) \in \mathfrak{L}^2(0,T;(H^1(\Omega))^*)$; *le problème* (III′) *a une solution* $u(t) \in \mathfrak{L}^\infty(0,T;\mathfrak{L}^2(\Omega))$.

On peut considérer les problèmes périodiques (I''), (II''), (III'') correspondantes aux problèmes de Cauchy (I'), (II'), (III').

Pour le problème (I'') on a le résultat suivant:

THÉORÈME 4. *Soit* $f(t) \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$ *et* $\alpha > 0$; *le problème* (II'') *a une solution* $u(t) \in \mathcal{L}^\infty(0, T; E)$.

La démonstration du Théorème 4 est analogue à celle dans [3] et nous ne l'examinerons pas.

Pour les problèmes (II''), (III'') on a le résultat suivant:

THÉORÈME 5. *Soit* $f(t) \in \mathcal{L}^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ $(\mathcal{L}^2(0, T; (H^1(\Omega))^*))$; *le problème* (II'') ((III'')) *a une solution* $u(t) \in \mathcal{L}^\infty(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$.

Le Théorèm 5 est démontré dans le § 5, Note III.

Remarque 1. – Il faut observer que H. Brézis démontre, par le Lemme 1, un resultat d'existence pour le problème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \Delta u(t, x) + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\right) \ni f(t, x) \quad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad [0, T] \times \Omega$$

$$u(t, x)|_\Gamma = 0 \quad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad [0, T]$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) \quad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad \Omega.$$

avec $f(t) \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$ et $j(u_0(x)) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ $(\partial j(\eta) = \beta(\eta))$; le problème a été aussi étudié dans sa formulation forte et dans le cas $D(\beta) =]a, b[$ par Amerio–Prouse [2].

Ce problème avec $\beta(\eta)$ non monotone mais qui vérifie les conditions (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) reste ouvert.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMERIO L. et PROUSE G., *Almost periodic functions and functional equations,* Van Nostrand, Reinhold 1971.

[2] AMERIO L. et PROUSE G., *On the non linear wave equation with dissipative term discontinuous with respect to the velocity,* « Rend. Acc. Naz. Lincei », *44* (1968).

[3] BIROLI M., *Sur l'équation des ondes avec un terme non linéaire, monotone dans la fonction inconnue,* « Rend. Acc. Naz. Lincei », à paraître.

[4] BIROLI M., *Sur les solutions bornées ou presque périodiques des équations d'évolution multivoques dans les espaces de Hilbert,* « Ricerche di Mat. », *21* [1], 17–47 (1972).

[5] BRÉZIS H., *Monotonicity methods in Hilbert space and some applications to non linear partial differential equations,* « Proc. Symp. Madison 1971 », Acc. Press 1971, 101–156.

[6] HESS P., *A strongly non linear parabolic equation. Notices of A.M.S.*, August 1972, A 583.

[7] HUKUHARA M., *Sur l'existence de points invariants d'une transformation des espaces fonctionnelles,* « Japan J. of Math. », *20*, 1–4 (1950).

[8] LIONS J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* Dunod–Gauthier Villars 1969.

[9] STAMPACCHIA G., *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.* Les Presses de l'Université de Montreal 1966.

[10] STRAUSS W., *On weak solutions of semilinear hyperbolic equations,* à paraître.