Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Vieri Benci

Su un problema di filtrazione in un mezzo poroso non omogeneo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.1, p. 10–15.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_1_10_0>

Analisi matematica. — *Su un problema di filtrazione in un mezzo poroso non omogeneo.* Nota di VIERI BENCI, presentata (*) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — We prove the existence of a unique solution for a free boundary problem relative to the stationary flow between two water reservoirs of different levels separated by a dam of a non-homogeneous porous medium.

I problemi di frontiera libera che derivano dallo studio dei processi di filtrazione comportano notevoli difficoltà. C. Baiocchi, in [1], ha ridotto allo studio di una disequazione variazionale il problema di filtrazione attraverso una diga di materiale omogeneo. Nel presente lavoro, si generalizza il risultato di [1], ad un caso in cui la diga non è di materiale omogeneo.

1. – Sia dato il rettangolo

$$D = \{(x , y) \mid 0 < x < a \quad ; \quad 0 < y < b\}$$

che schematizza la sezione di una diga ed una funzione $k(x , y)$ definita in D che fisicamente rappresenta il «coefficente di permeabilità» della diga.

Si suppone che questa funzione sia di tipo particolare, cioè che sia

$$k(x , y) = e^{f(x)+g(y)} \tag{1-1}$$

con

$$f \in H^{1,2+\mu}(0 , a) \tag{1-2}$$

$$g \in H^{1,2+\mu}(0 , b) \tag{1-3}$$

dove μ è una costante > 0 e $g(y)$ è tale che

$$g'(y) \geq 0 \qquad \text{q.o. in }]c , b[\tag{1-4}$$

essendo c una costante data $< b$ che rappresenta il livello dell'acqua nel secondo bacino.

Si dimostra l'esistenza e l'unicità di una terna $\{\varphi , \Omega , u\}$ dove

$$\varphi \in C^0([0 , a]) \tag{1-5}$$

$$\Omega = \{(x , y) \in D \mid y < \varphi(x)\} \tag{1-6}$$

$$u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \tag{1-7}$$

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1973.

tale che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

(1–8) φ è monotona strettamente decrescente in $[0, a]$

(1–9) $\varphi(0) = b \quad ; \quad \varphi(a) \geq c$

(1–10) $\operatorname{div}[k(x, y) \operatorname{grad} u(x, y)] = 0$ in Ω nel senso della teoria delle distribuzioni

(1–11)
$$\begin{cases} u \equiv b & \text{su } \Gamma_1 \\ u \equiv c & \text{su } \Gamma_2 \\ u = y & \text{su } \Gamma_3 \cap \partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \equiv 0 & \text{su } \Gamma_4 \\ u = y & \text{su } \Gamma_0 \\ \dfrac{du}{dn} \equiv 0 & \text{su } \Gamma_0 \end{cases}$$

dove con d/dn si indica la derivata normale esterna nel senso della teoria delle distribuzioni e dove si è posto

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x, y) \in \partial D \mid x = 0 ; \ 0 < y < b\} \\ \Gamma_2 &= \{(x, y) \in \partial D \mid x = a ; \ 0 < y < c\} \\ \Gamma_3 &= \{(x, y) \in \partial D \mid x = a ; \ c < y < b\} \\ \Gamma_4 &= \{(x, y) \in \partial D \mid 0 < x < a ; \ y = 0\} \\ \Gamma_5 &= \{(x, y) \in \partial D \mid 0 < x < a ; \ y = b\} \\ \Gamma_0 &= \{(x, y) \in \partial\Omega \mid 0 < x < a ; \ y = \varphi(x)\} . \end{aligned}$$

2. – Il problema viene ricondotto alla risoluzione di una disequazione variazionale su un convesso di $H^1(D)$ [5].

Infatti ammettendo che esista una terna $\{\varphi, \Omega, u\}$ che sia soluzione del problema precedente e ponendo

$$w(x, y) = \begin{cases} \displaystyle\int_y^{\varphi(x)} e^{g(\eta)} [u(x, \eta) - \eta] \, d\eta & \text{per } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{per } (x, y) \in D \setminus \Omega \end{cases}$$

si può verificare che w soddisfa la seguente disequazione variazionale

(2–1)
$$\begin{cases} w \in \mathbf{K} \\ \displaystyle\int_D e^{f(x)-g(y)} \operatorname{grad} w \operatorname{grad}(v - w) \, dx \, dy \geq -\int_D e^{f(x)} (v - w) \, dx \, dy \quad \forall v \in \mathbf{K} \end{cases}$$

con

$$\mathbf{K} = \{v \in H^1(D) \mid v|_{\partial D} = h ; v \geq 0 \quad \text{nel senso di } H^1(D)\}$$

dove h è una funzione così definita:

$$
(2\text{–}2)\quad \begin{cases}
h(0\,,y) = \displaystyle\int_y^b e^{g(\eta)}\,[b-\eta]\,d\eta & \text{su } \overline{\Gamma}_1 \\[2ex]
h(a\,,y) = \displaystyle\int_y^c e^{g(\eta)}\,[c-\eta]\,d\eta & \text{su } \overline{\Gamma}_2 \\[2ex]
h(0\,,x) = \left(\displaystyle\int_0^a e^{-f(\xi)}\,d\xi\right)^{-1}\left[h(0\,,0)\displaystyle\int_x^a e^{-f(\xi)}\,d\xi + h(a\,,0)\displaystyle\int_0^x e^{-f(\xi)}\,d\xi\right] & \text{su } \Gamma_4 \\[2ex]
h \equiv 0 \quad \text{su } \overline{\Gamma}_3 \cup \overline{\Gamma}_5 .
\end{cases}
$$

La disequazione variazionale (2–1) ha soluzione per il Teorema 2–1 di [5].

Per il Teorema 11 di [6] si ha che la soluzione w della (2–1) appartiene a $H^{2,2+\mu}(D)$ qualora il seguente problema abbia soluzione:

$$
\begin{cases}
w \in H^{2,2+\mu}(D) \\
\operatorname{div}\,[e^{f(x)-g(y)}\,\operatorname{grad} w(x\,,y)] = e^{f(x)} \quad \text{in } D .
\end{cases}
$$

Quest'ultimo fatto si dimostra partendo dalle considerazioni di [3] pag. 386.

Così si arriva al seguente Teorema:

TEOREMA 1. – *La disequazione variazionale* (2–1) *ammette una ed una sola soluzione* w. *Inoltre* w *gode delle seguenti proprietà*:

$$
w \in H^{2,2+\mu}(D) \quad \textit{e quindi} \quad w \in C^{1,\alpha}(\overline{D}) \quad \textit{con} \quad \alpha = 1 - \frac{2}{2+\mu} .
$$

Inoltre posto

$$
\hat{\Omega} = \{(x\,,y) \in D \mid w(x\,,y) > 0\}
$$

si ha:

$$
\operatorname{div}\,[e^{f(x)-g(y)}\,\operatorname{grad} w] = e^{f(x)} \quad \textit{in } \hat{\Omega} \textit{ nel senso di } H^2(\hat{\Omega}) .
$$

3. – Partendo dalla soluzione della disequazione variazionale (2–1), si vuole costruire una terna che sia soluzione del problema dato.

Si premette la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 2. – *Se* w *è la soluzione della disequazione variazionale* (2–1), *allora si ha*:

$$
w_x \leq 0 \quad ; \quad w_y \leq 0 \quad \textit{in } D .
$$

Infatti ponendo

$$
q(x\,,y) = -\,e^{f(x)}\,w_x(x\,,y)
$$

$$
p(x\,,y) = -\,e^{-g(y)}\,w_y(x,y)
$$

si può verificare che in $\hat{\Omega}$ sono soddisfatte le seguenti equazioni (nel senso delle distribuzioni):

$$\operatorname{div}\left[(k(x,y))^{-1}\operatorname{grad} q(x,y)\right]=0 \tag{3-1}$$

$$\operatorname{div}\left[k(x,y)\operatorname{grad} p(x,y)\right]=-k(x,y)\,g'(y)\,. \tag{3-2}$$

Dalla (3–1), con calcoli opportuni, si ottiene:

$$\int_{\hat{\Omega}}(k(x,y))^{-1}\operatorname{grad} q(x,y)\operatorname{grad} v(x,y)\,dx\,dy=0\,,\qquad \forall v\in V_1 \tag{3-3}$$

dove $V_1=\{v\in H^1(\hat{\Omega})\mid v=0 \text{ su } \gamma_1\,;\ v\geq 0\}$ con $\gamma_1=\Gamma_0\cup\Gamma_4\cup\Gamma_3$.

Con semplici calcoli si può verificare che su γ_1 si ha $q\geq 0$.

Il secondo membro della (3–3) è $\geq 0\ \forall v\in V_1$, perciò applicando il Teorema 1 di 2 segue che

$$q\geq\min\,(0\,,\,\min_{\gamma_1} q)=0\,.$$

Per provare la seconda parte della Proposizione 2, si pone

$$z(x,y)=\begin{cases}c-y & \text{per } 0\leq y\leq c\\ 0 & \text{per } c\leq y\leq b\,.\end{cases}$$

Si osservi che:

$$\operatorname{div}\left[k(x,y)\operatorname{grad} z(x,y)\right]=\begin{cases}-k(x,y)\,g'(y) & \text{in } \hat{\Omega} \text{ con } 0<y<c\\ 0 & \text{in } \hat{\Omega} \text{ con } c<y<b\,.\end{cases} \tag{3-4}$$

Dalla (3–2) e dalla (3–4) segue che

$$\begin{aligned}\int k(x,y)\operatorname{grad}(p-z)\operatorname{grad} v(x,y)\,dx\,dy\geq\\ =\int_{\{(x,y)\in\hat{\Omega}\mid y>c\}}k(x,y)\,g'(y)\,v(x,y)\,dx\,dy\qquad\forall v\in V_2\end{aligned} \tag{3-5}$$

dove $V_2=\{v\in H^1(\hat{\Omega})\mid v=0 \text{ su } \gamma_2\,;\ v\geq 0\}$ con $\gamma_2=\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup(\Gamma_3\cap\partial\hat{\Omega})$.

Ma il secondo membro della (3–5) è ≥ 0 per la (1–4); quindi, applicando ancora una volta il Teorema 1 di [2], si ottiene

$$p-z\geq\min\,(0\,,\,\min_{\gamma_2}(p-z))\,.$$

Si può facilmente verificare che, su γ_2, si ha $p\geq z$ e quindi $p-z\geq 0$; da cui la tesi.

Si osservi che le funzioni p e q e la Proposizione 2 hanno un significato fisico ben preciso. Infatti $p(x, y)$ rappresenta la differenza di pressione fra il punto (x, y) e quella atmosferica; $q(x, y)$ rappresenta il flusso che filtra attraverso il segmento $\{(x, \eta) \mid y \leq \eta \leq b\}$.

Mediante la Proposizione 2, si possono dimostrare i seguenti lemmi:

LEMMA 1. – *Si ponga*

$$\Omega^-(x, y) = \{(\xi, \eta) \in D \mid \xi < x \ ; \ \eta < y\}$$

$$\Omega^+(x, y) = \{(\xi, \eta) \in D \mid \xi > x \ ; \ \eta > y\} .$$

Allora si ha:

a) $\forall (x, y) \in D - \hat{\Omega}$ *si ha* $\Omega^+(x, y) \subset D - \hat{\Omega}$

b) $\forall (x, y) \in D \cap \partial\hat{\Omega}$ *si ha* $\Omega^-(x, y) \subset \hat{\Omega}$.

LEMMA 2. – $\partial\hat{\Omega} \cap \bar{D}$ *non contiene tratti orizzontali né verticali.*

Finalmente può essere enunciato il risultato fondamentale di questa Nota:

TEOREMA 3. – *Il problema del n. 1 ammette una unica soluzione così definita*:

$$\text{(3–6)} \qquad \begin{cases} \varphi(x) = \sup \{y \in [0, b] \mid (x, y) \in \hat{\Omega}\} \\ \varphi(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) \\ \varphi(a) = \lim\limits_{x \to a^-} \varphi(x) \end{cases}$$

$$\Omega = \hat{\Omega}$$

$$\text{(3–7)} \qquad u(x, y) = [y - e^{-g(y)} w_y(x, y)]|_{\hat{\Omega}} .$$

Infatti fissato un $x \in]0, a[$ si ha che

$$\{y \in [0, b] \mid (x, y) \in \hat{\Omega}\} \neq \varnothing$$

poichè $w|_{\Gamma_4} = h|_{\Gamma_4} > 0$. Allora ha senso la prima delle (3–6).

Per il Lemma 1 si ha quindi che $\Omega = \hat{\Omega}$ è un insieme del tipo (1–6). Inoltre, sempre per il Lemma 1, si ha che φ in $]0, a[$ è una funzione monotona, monotonia che risulta stretta grazie al Lemma 2. Quindi hanno senso anche la seconda e la terza delle (3–6). Il Lemma 2 assicura anche la continuità della φ. Perciò φ soddisfa alle (1–5), (1–8) e (1–9).

Per il Teorema 1 e la definizione (3–7) si ha che $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Risulta così verificata anche (1–7). Ricordando che $w|_{\partial\Omega} = h|_{\partial\Omega}$ ed eseguendo i calcoli si può anche verificare che u soddisfa la (1–11) e l'equazione (1–10).

BIBLIOGRAFIA

[1] BAIOCCHI C., *Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica,* « Ann. di Mat. pura ed appl. », serie 4ª, *92,* 107–127 (1972).

[2] CHICCO M., *Principio di massimo per soluzioni di problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale,* « Boll. U.M.I. », *3,* 384–394 (1970).

[3] GRISVARD P., *Equations differentielles abstraites,* « Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., Paris », (4), *2,* 311–395 (1969).

[4] STAMPACCHIA G., *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinues,* « Annales Inst. Fourier », *15,* n. 1, 189–258 (196).

[5] STAMPACCHIA G., *Variational Inequalities,* Proc. Nato, 101–192, Venice (1968).

[6] STAMPACCHIA G., *On a problem of numerical analysis connected with the theory of variational inequalities.* C. N. R. Istituto di elaborazione della informazione. Pisa (1972), « Symposia Mathematica », *10,* 281–293.