Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Roberto Infantino

Una estensione di un teorema di E.M. Stein relativo agli integrali singolari. Applicazione alle equazioni ellittiche. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.1-2, p. 29–34.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_1-2_29_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Analisi matematica. — *Una estensione di un teorema di E.M. Stein relativo agli integrali singolari. Applicazione alle equazioni ellittiche* (*). Nota I (**) di ROBERTO INFANTINO, presentata dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — We prove a result on transforms of Calderon–Zygmund type in L^p-spaces with weight.

In una mia recente ricerca (cfr. [4]) sulle singolarità eliminabili delle soluzioni deboli delle equazioni ellittiche ho avuto occasione di riconoscere l'utilità che deriverebbe dalla eventuale possibilità di estendere i teoremi di regolarizzazione di S. Agmon [1] al caso in cui il termine noto dell'equazione sia sommabile L^p con un peso conveniente.

Una tale estensione si consegue facilmente quando si disponga di un teorema del tipo di Calderon e Zygmund (cfr. [2]) per trasformazioni integrali di funzioni che siano sommabili L^p con peso.

Un risultato di questo genere è stato stabilito da E. M. Stein nel caso in cui il peso è del tipo $|x|^\alpha$ (cfr. [5]).

In questa Nota mi propongo di estendere il risultato di Stein al caso in cui il peso è del tipo $\rho^\alpha(x)$, dove $\rho(x)$ è la distanza del punto x da una varietà di $\mathbf{R}^n$ ad $h < n$ dimensioni.

Questo risultato è stabilito in questa Nota per il caso in cui la varietà è quella di equazioni $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$, $s = n - h$.

In una Nota II, recante lo stesso titolo, verrà preso in considerazione il caso generale.

Il procedimento seguito è dello stesso tipo di quello di E. M. Stein, ma ha richiesto, per la maggiore complessità del problema che ha dato luogo a nuove difficoltà, vari accorgimenti tecnici.

Le possibili applicazioni alle questioni relative alle equazioni ellittiche cui abbiamo accennato all'inizio saranno precisate nella Nota II.

1. Sia V_h la varietà di $\mathbf{R}^n$ ad $h < n$ dimensioni di equazioni $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$ $s = n - h$.

Poniamo $\delta(x) = \left(\sum_{i=1}^{s} x_i^2\right)^{1/2}$ e indichiamo con $L^p(\mathbf{R}^n)$ e $L^p_\mu(\mathbf{R}^n)$ rispettivamente lo spazio delle funzioni di potenza p-esima sommabile in $\mathbf{R}^n$ e lo spazio delle funzioni f per cui $\delta^\mu f \in L^p(\mathbf{R}^n)$.

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1972.

In questo numero ci proponiamo di dimostrare il seguente

TEOREMA 1.1. – *Posto*

$$T\varphi(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \{H(x, x-y)/|x-y|^n\} \varphi(y)\, dy,$$

supponiamo che riesca:

$$\|T\varphi\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C_p \|\varphi\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \qquad \forall \varphi \in L^p(\mathbf{R}^n), \qquad 1 < p < \infty,$$

$$|H(x, x-y)| \leq C.$$

Allora, se $1 < p < \infty$, $-\frac{s}{p} < \beta < \frac{s}{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $f \in L^p_\beta(\mathbf{R}^n)$, *si ha*:

$$\|Tf\|_{L^p_\beta(\mathbf{R}^n)} \leq C_{p,\beta} \|f\|_{L^p_\beta(\mathbf{R}^n)}.$$

La dimostrazione del teorema segue quasi immediatamente dal seguente

LEMMA 1.1. – *Posto*:

$$K(x, y) = \left| 1 - \left(\frac{\delta(x)}{\delta(y)}\right)^\beta \right| |x-y|^{-n},$$

$$\mathcal{C}f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x, y) f(y)\, dy$$

riesce:

$$\|\mathcal{C}f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C_{p,\beta} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}, \qquad se \quad -\frac{s}{p} < \beta < \frac{s}{p'},$$

dove $C_{p,\beta}$ *è una costante che dipende soltanto da* p *e* β.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA.

Poniamo:

$$x = (u, t), \quad u = (x_1, \cdots, x_s), \quad t = (x_{s+1}, \cdots, x_n);$$

$$y = (v, z), \quad v = (y_1, \cdots, y_s), \quad z = (y_{s+1}, \cdots, y_n);$$

$$r = |u|, \quad R = |v|, \quad \lambda = \frac{R}{r}, \quad u = r\xi, \quad v = R\eta;$$

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_2 = [2, +\infty[, \quad I_3 = \left]\frac{1}{2}, 2\right[,$$

$$K_i(x, y) = \begin{cases} K(x, y) & \text{per } \lambda \in I_i \\ 0 & \text{per } \lambda \notin I_i \end{cases}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$\mathcal{C}_i f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K_i(x, y) f(y)\, dy, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Indichiamo con Σ e Σ' rispettivamente le sfere $|x| = 1$ e $|y| = 1$; con $d\omega_\xi$ e $d\omega_\eta$ rispettivamente gli elementi di misura su Σ e Σ'.

Con $c, c_0, c_1, \cdots$, indichiamo costanti che non dipendono da f.

Si ha:

$$(1.1) \qquad |\mathcal{T}f(x)| \leq \int_{\mathbf{R}^s} |1-\lambda^{-\beta}|\, dv \int_{\mathbf{R}^h} \frac{|f(v, z)|\, dz}{[|u-v|^2 + |t-z|^2]^{n/2}}$$

$$= \int_{\Sigma'} \int_0^{+\infty} |1-\lambda^{-\beta}|\, R^{s-1} dR\, d\omega_\eta \int_{\mathbf{R}^h} \frac{|f(R\eta, z)|\, dz}{[|r\xi - R\eta|^2 + |t-z|^2]^{n/2}} .$$

Consideriamo dapprima $\mathcal{T}_1 f$. Con il cambiamento di variabili $R = \lambda r$, $z = t + r\zeta$, osservato che, per $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$, riesce $|\xi - \lambda\eta| \geq \frac{1}{2}$, dalla (1.1) si trae:

$$(1.2) \qquad |\mathcal{T}_1 f| \leq \int_{\Sigma'} \int_0^{1/2} |1-\lambda^{-\beta}|\, \lambda^{s-1} d\lambda\, d\omega_\eta \int_{\mathbf{R}^h} \frac{|f(\lambda r\eta, t + r\zeta)|\, d\zeta}{\left(\frac{1}{4} + |\zeta|^2\right)^{n/2}} .$$

Posto:

$$g(\lambda) = |1-\lambda^{-\beta}|\, \lambda^{s-1} \quad , \qquad F_{\lambda\eta}(r, t) = \int_{\mathbf{R}^h} \frac{|f(\lambda r\eta, t + r\zeta)|\, d\zeta}{\left(\frac{1}{4} + |\zeta|^2\right)^{n/2}}$$

osservato ancora che per una nota diseguaglianza di Minkowski (1) riesce:

$$(1.3) \qquad \left(\int_{\mathbf{R}^h} |F_{\lambda\eta}(r, t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leq \int_{\mathbf{R}^h} \frac{d\zeta}{\left(\frac{1}{4} + |\zeta|^2\right)^{n/2}} \left(\int_{\mathbf{R}^h} |f(\lambda r\eta, t)|^p\, dt\right)^{1/p}$$

$$= C_0 \left(\int_{\mathbf{R}^h} |f(\lambda r\eta, t)|^p\, dt\right)^{1/p},$$

applicando ancora la diseguaglianza di Minkowski, dalla (1.2) si ottiene:

$$\|\mathcal{T}_1 f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq \int_{\Sigma'} \int_0^{1/2} g(\lambda)\, d\lambda\, d\omega_\eta \left[\int_0^{+\infty} r^{s-1} dr \int_{\mathbf{R}^h} |F_{\lambda\eta}(r, t)|^p\, dt\right]^{1/p}$$

$$\leq c_1 \int_{\Sigma'} \int_0^{1/2} g(\lambda)\, d\lambda\, d\omega_\eta \left[\int_0^{+\infty} r^{s-1} dr \int_{\mathbf{R}^h} |f(\lambda r\eta, t)|^p\, dt\right|^{1/p}.$$

(1) Qui e nel seguito per diseguaglianza di Minkowski intendiamo quella data dal Teorema 202 di [3].

Quindi applicando la diseguaglianza di Hölder e tenendo presente che:

$$(1.4) \qquad \int_0^{+\infty} |h(\lambda r)|^p r^{s-1}\, dr = \lambda^{-s} \int_0^{+\infty} |h(r)|^p r^{s-1}\, dr ,$$

si ha:

$$(1.5) \qquad \|\mathcal{T}_1 f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq c_2 \int_0^{1/2} g(\lambda)\, \lambda^{-\frac{s}{p}}\, d\lambda \left[\int_0^{+\infty} \int_{\Sigma'} \int_{\mathbf{R}^h} |f(r\eta, t)|^p r^{s-1}\, dr\, d\omega_\eta\, dt \right]^{1/p}$$

$$= c_2 \int_0^{1/2} g(\lambda)\, \lambda^{-\frac{s}{p}}\, d\lambda \cdot \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} .$$

Dalla (1.5), osservato che:

$$\int_0^{1/2} g(\lambda)\, \lambda^{-\frac{s}{p}}\, d\lambda = \int_0^{1/2} |1 - \lambda^{-\beta}|\, \lambda^{s-1}\, d\lambda < +\infty ,$$

in quanto $\beta < \frac{s}{p'} \Rightarrow -\beta + s - 1 - \frac{s}{p} > -1$, si ha:

$$(1.6) \qquad \|\mathcal{T}_1 f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C_{p,\beta} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} .$$

Passiamo ora a studiare $\mathcal{T}_2 f$. Ora è $\lambda \geq 2$ e quindi

$$|\xi - \lambda\eta|^2 = 1 - 2\lambda \cos(\xi, \eta) + \lambda^2 \geq c\lambda^2 .$$

Con il cambiamento di variabili $R = \lambda r$, $z = t + r\lambda\zeta$, dalla (1.1) si trae:

$$(1.2)' \qquad |\mathcal{T}_2 f| \leq \int_{\Sigma'} \int_2^{+\infty} |1 - \lambda^{-\beta}|\, \lambda^{-1}\, d\lambda\, d\omega_\eta \int_{\mathbf{R}^h} \frac{|f(\lambda r\eta, t + r\lambda\zeta)|}{(c^2 + |\zeta|^2)^{n/2}}\, d\zeta .$$

Dalla (1.2)′, osservato che:

$$\int_2^{+\infty} |1 - \lambda^{-\beta}|\, \lambda^{-1-\frac{s}{p}}\, d\lambda < +\infty ,$$

in quanto $-\beta - 1 - \frac{s}{p} < -1$ per ipotesi, con gli stessi ragionamenti che seguono la (1.2) si ottiene:

$$(1.7) \qquad \|\mathcal{T}_2 f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C_{p,\beta} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} .$$

Consideriamo infine $\mathcal{T}_3 f$. Essendo ora $\frac{1}{2} < \lambda < 2$, esiste una costante c per cui riesce:

$$K_3(x, y) \leq c\, |1 - \lambda^2|\, |x - y|^{-n} , \qquad \frac{1}{2} < \lambda < 2 .$$

Perciò dalla (1,1), effettuando il cambiamento di variabili $R = \lambda r$, $z = t + r\,|\xi - \lambda\eta|\,\zeta$, si ha:

$$(1.8)\qquad |\mathcal{C}_3 f| \le c \int_{\Sigma'} \int_{1/2}^{2} \frac{|1-\lambda^2|\,\lambda^{s-1}}{|\xi-\lambda\eta|^s}\, d\lambda\, d\omega_\eta \int_{\mathbf{R}^h} \frac{|f(\lambda r\eta, t + r\,|\xi-\lambda\eta|\,\zeta)|\, d\zeta}{(1+|\zeta|^2)^{n/2}}\,.$$

Posto ora

$$F_{\lambda\eta}(r, \xi) = \int_{\mathbf{R}^h} \frac{|f(\lambda r\eta, t + r\,|\xi-\lambda\eta|\,\zeta)|\, d\zeta}{(1+|\zeta|^2)^{n/2}}\,,$$

con lo stesso ragionamento seguito per ricavare la (1.3) si ottiene:

$$(1.9)\qquad \int_{\mathbf{R}^h} |F_{\lambda\eta}(r, \xi)|^p\, dt \le c_1 \int_{\mathbf{R}^h} |f(\lambda r\eta, t)|^p\, dt\,.$$

Posto:

$$P_\lambda(\xi, \eta) = \frac{|1-\lambda^2|}{|\xi-\lambda\eta|^s}\,, \qquad G_\lambda(\eta) = \left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbf{R}^h} |f(\lambda r\eta, t)|^p\, r^{s-1}\, dr\, dt \right)^{1/p},$$

$$\psi_\lambda(\xi) = \int_{\Sigma'} P_\lambda(\xi, \eta)\, G_\lambda(\eta)\, d\omega_\eta\,,$$

per la diseguaglianza di Minkowski e per la (1,9), dalla (1.8) si trae:

$$\left(\int_0^{+\infty} r^{s-1}\, dr \int_{\mathbf{R}^h} |\mathcal{C}_3 f|^p\, dt \right)^{1/p} \le$$

$$\le c_2 \int_{1/2}^{2} \int_{\Sigma'} P_\lambda(\xi, \eta)\, d\lambda\, d\omega_\eta \left(\int_0^{+\infty} r^{s-1}\, dr \int_{\mathbf{R}^h} |F_{\lambda\eta}(r, \xi)|^p\, dt \right)^{1/p} \le c_3 \int_{1/2}^{2} \psi_\lambda(\xi)\, d\lambda\,.$$

Da quest'ultima diseguaglianza, applicando ancora una volta la diseguaglianza di Minkowski, si ottiene:

$$(1.10)\qquad \|\mathcal{C}_3 f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \le c_4 \left\{ \int_{\Sigma} d\omega_\xi \left(\int_{1/2}^{2} \psi_\lambda(\xi)\, d\lambda \right)^p \right\}^{1/p} \le c_4 \int_{1/2}^{2} d\lambda \left(\int_{\Sigma} |\psi_\lambda(\xi)|^p\, d\omega_\xi \right)^{1/p}.$$

Quindi, essendo per una nota proprietà del nucleo di Poisson $P_\lambda(\xi, \eta)$:

$$\int_{\Sigma} |\psi_\lambda(\xi)|^p\, d\omega_\xi \le \int_{\Sigma'} |G_\lambda(\eta)|^p\, d\omega_\eta\,,$$

e risultando per la (1.4):

$$\int_{\Sigma'} |G_\lambda(\eta)|^p\, d\omega_\eta = \lambda^{-s}\, \|f\|^p_{L^p(\mathbf{R}^n)}\,,$$

dalla (1.10) si trae:

$$\|\mathcal{T}_3 f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} = c_4 \int_{1/2}^{2} \lambda^{-\frac{s}{p}} d\lambda \cdot \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C_{p,\beta} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} . \tag{1.11}$$

Dalle (1.6), (1.7), (1.11) segue l'asserto perché $\mathcal{T}f = \sum_{i=1}^{3} \mathcal{T}_i f$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.1.

Seguendo il procedimento di Stein si ha:

$$\|T(\delta^\beta f) - \delta^\beta Tf\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq c\,\mathcal{T}(\delta^\beta f)$$

e di qui l'asserto, tenendo presente che per il Lemma 1.1:

$$\|\mathcal{T}(\delta^\beta f)\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C_{p,\beta} \|f\delta^\beta\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} ,$$

mentre è per ipotesi:

$$\|T(\delta^\beta f)\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C_p \|\delta^\beta f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} .$$

OSSERVAZIONE 1.1. – Sia Ω un aperto di V_h e $-\frac{s}{p} < \beta < 0$, inoltre il supporto di f sia contenuto nel cilindro di $\mathbf{R}^n$: $\{x : t \in \Omega\}$. Allora il Teorema 1.1 continua a sussistere anche se $\delta(x)$ rappresenta la distanza del punto $x \in \mathbf{R}^n$ da Ω.

Invero, essendo $\delta(x) \geq |u|$, tenendo presente il Teorema 1.1 si ha:

$$\|\delta^\beta Tf\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq \||u|^\beta Tf\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C_{p,\beta} \||u|^\beta f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}$$

e di qui l'asserto, dato che, essendo $\delta(x) = |u|$ per ogni x appartenente al supporto di f, risulta:

$$\||u|^\beta f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} = \|\delta^\beta f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON, *The* L_p *approach to the Dirichlet problem*, «Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa», (III) *13*, 405–448 (1959).

[2] A. P. CALDERON e A. ZYGMUND, *On singular integrals*, «Amer. J. Math.», *78*, 289–309 (1956).

[3] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD e G. POLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1967.

[4] R. INFANTINO, *Un teorema di singolarità eliminabili per le soluzioni deboli delle equazioni lineari ellittiche*, in corso di stampa sui «Rendicanti dell'Accademia dei Lincei».

[5] E. M. STEIN, *Note on singular integrals*, «Proc. Amer. Math. Soc.», *8*, 250–254 (1957).

[6] M. TROISI, *Problemi ellittici con dati singolari*, «Ann. di Matem.», *83*, 363–407 (1969).

Nota aggiunta durante la correzione delle bozze.

Durante la correzione delle bozze sono venuto a conoscenza di una Nota di T. A. TIMAN, *Existence conditions and estimates of transforms of the Calderon–Zygmund type in weights of* L_p*-spaces*, «Trudy Mat. Inst. Steklov», *105* (969), nella quale si dimostra un teorema sostanzialmente equivalente al risultato della presente Nota. La dimostrazione però è diversa.